# சிக்கலெண்களின் தத்துவம்

(FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLE INCLUDING CONFORMAL MAPPING)

க. சிவசுப்பிரமணியம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த.பா.நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—599

# சிக்கலெண்களின் தத்துவம்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்
**க. சிவசுப்பிரமணியம்**, எம்.ஏ.,
*கணிதத்துறை இணைப்பேராசிரியர்,*
*மாநிலக் கல்லூரி,*
*சென்னை.*

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—December, 1974

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 599



**Functions of Complex Variable Including Conformal Mapping**

K. SIVASUBRAMANIAM

Price Rs. 3.05

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

*Printed at*
Tax and Company Law Press,
Madras-600032.

# அணிந்துரை

## திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்விமொழியாக ஆக்கிப் பதினன்கு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'சிக்கலெண்களின் தத்துவம்'** என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **599**ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க்குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **634** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக் கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

**இரா. நெடுஞ்செழியன்**

# பொருளடக்கம்

# 1. சிக்கல் எண்ணின் சார்பலன்கள்
## (Functions of a Complex Variable)

### 1·1. சிக்கல் எண்கள் (Complex Numbers)

$\alpha$, $\beta$ என்பவைகள் மெய் எண்களாகவும் $i = +\sqrt{-1}$ என்றும் கொண்டு $\alpha + i\beta$ என்ற வடிவிலுள்ள எண்களைச் **சிக்கல் எண்களென்**போம். இங்கு $\alpha$ என்பதைச் சிக்கல் எண்ணின் **மெய்ப் பகுதி** (real part) என்றும், $\beta$ என்பதை **மெய்யிலாப் பகுதி** (imaginary part) என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளைப் பற்றிப் படிக்கும்போது, சிக்கல் எண்களின் அவசியத்தைக் கண்டோம். உதாரணமாக, $x^2 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் 1, $-1$ என்பது தெளிவு. ஆனால் $x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மெய்யான மூலங்கள் கிடையா. $x^3 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மெய்யான மூலம் '1' ஒன்றுதான். சமன்பாடுகளின் படிகளுக்கும் அவைகளின் மூலங்களின் எண்ணிக்கைக்குமிடையே ஒரு தொடர்பு உண்டாக்க வேண்டின், சிக்கல் எண்களின் உதவியை நாட வேண்டியிருக்கிறது. அப்படிக் கொண்டு, '$n$' படிச் சமன்பாடுகளுக்கு '$n$' மூலங்கள் (மெய்யானவையாகவோ, மெய்யிலாதனவாகவோ) உண்டு எனக் கொள்ளலாம்.

$\alpha + i\beta$ என்ற சிக்கல் எண்ணை $(\alpha, \beta)$ என்ற வரிசைப்படுத்திய மெய் எண்களாலான வெக்டார் எனவும் கருதலாம். ஆகவே $x$ என்ற மெய் எண்ணை $(x, 0)$ என்ற வெக்டாராகவும் '$i$' என்ற மெய்யிலா எண்ணை $(0, 1)$ என்ற வெக்டாராகவும் கொள்ளலாம்.

### 1·2. தன்மைகள்

(1) சிக்கல் எண்கள் இரண்டின் மெய்ப் பகுதிகளும், மெய்யிலாப் பகுதிகளும் சமமாயிருந்தால் ஒழிய, அவை இரண்டும் சமம் எனக் கூற இயலாது.

$x+iy=x'+iy'$ என்ருல் $x=x'$ என்றும், $y=y'$ என்றும் இருந்து ஆக வேண்டும்.

சிக்கல் எண்களிடையே, ஒன்றை மற்ருென்றைவிடப் பெரியது அல்லது சிறியது என்று கூறுவது இயலாது. இரு சிக்கல் எண்கள் சமமென்ருே, சமமற்றவையென்ருேதான் கூற இயலும்.

(2) $z=x+iy$ என்று சிக்கல் எண்ணைக் குறித்தால், அதன் **மட்டு** (modulus) என்பதை $|z| = +\sqrt{x^2+y^2}$ என்று வரையறுக்கலாம்.

$|z|=0$ என்ருல், $x=0, y=0$ என்றுதான் இருக்கவேண்டும்.

(3) (a) $z=x+iy=(x, y)$

$z'=x'+iy'=(x', y')$ என்று இரு எண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் (sum) கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம்.

$$z+z'=(x+x')+i\,(y+y')$$
$$=[(x+x'), (y+y')]$$

**குறிப்பு :** சிக்கல் எண்களின் கூட்டுத்தொகையின் வரையறை, வெக்டார் கூட்டுத்தொகையின் வரையறையைப்போல் இருப்பதை நோக்கவும்.

(b) $\lambda z=\lambda x+i\lambda y$

$=(\lambda x, \lambda y)$ என்று சிக்கல் எண்ணை மெய் எண் '$\lambda$' ஆல் பெருக்கும்போது உண்டாகும் தொகையை மேற் கண்டவாறு வரையறுக்கலாம்.

$$\therefore \quad -z=-x-iy=(-x,-y)$$
$$z-z'=z+(-z')$$
$$=(x, y)+[-(x', y')]$$
$$=(x, y)+(-x', -y')$$
$$=(x-x', y-y')$$
$$=(x-x')+i\,(y-y')$$

(c) $$zz'=(x, y)\cdot(x', y')$$
$$=(xx'-yy', xy'+yx')$$
$$=(xx'-yy')+i\,(xy'+yx')$$

என்று வரையறுக்கலாம்.

(d) மேற்கண்ட வரையறைகளிலிருந்து கீழ்க்கண்ட விதிகளைச் சுலபமாகக் காணலாம்.

$$z+z'=z'+z \quad \text{(கூட்டல் பரிமாற்று விதி)}$$

$$z+(z'+z'')=(z+z')+z''$$
$$=z+z'+z'' \quad \text{(சேர்ப்பு விதி)}$$

$$z\cdot z'=z'\cdot z \quad \text{(பெருக்கல் பரிமாற்று விதி)}$$

$$z\cdot(z'\cdot z'')=(z\cdot z')\, z'' \quad \text{(பெருக்கல் சேர்ப்பு விதி)}$$

$$(z+z')\cdot z''=zz''+z'\,z'' \quad \text{(பரவு விதி)}$$

$$[z\cdot(z'\cdot z'')]=(x,y)\cdot[x'\,x''-y'\,y'',\ x'\,y''+x''\,y']$$
$$=[(x\,x'x''-xy'\,y''-x'\,y''\,y-yy'\,x'')$$
$$(xx'\,y''+xx''\,y'+x'x''\,y-yy'\,y'')]$$

$$(z\cdot z')\cdot z''=[(xx'-yy'),\ (xy'+yx')]\ [x'',y'']$$
$$=[(xx'\,x''-x''\,yy'-xy'\,y''-x'\,yy'')$$
$$(xx'\,y''-yy'\,y''+xx''\,y'+x'\,x''\,y)]$$

$\therefore \quad z\cdot(z'\cdot z'')=(z\cdot z')\cdot z''$ என்பது தெளிவு.

$$(z+z')\cdot z''=[(x+x'),\ (y+y')]\ (x'',y'')$$
$$=[\{(x+x')\,x''-(y+y')\,y''\},$$
$$\{(x+x')\,y''+(y+y')\,x''\}]$$
$$=[\{(xx''-yy'')+(x'\,x''-y'y'')\},$$
$$\{(x\,y''+y\,x'')+(x'\,y''+y'\,x'')\}]$$
$$=[(x\,x''-yy''),\ (x\,y''+y\,x'')]$$
$$+[(x'\,x''-y'\,y''),\ (x'\,y''+y'\,x'')]$$

$=[z\,z''+z'\,z'']$ என்று நிரூபிக்கலாம்.

**குறிப்பு 1 :** மேற்கண்ட விதிகளுக்குச் சிக்கல் எண்கள் உட்படும் போது, சிக்கல் எண்கள், மெய் எண்களின் இயற்கணித அடிப்படை விதிகளுக்குக் கட்டுப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம்.

**குறிப்பு 2 : வகுத்தல் விதி :** $z\,\zeta=z'$ என்ற சமன்பாட்டை நோக்குக.

$z=(x,y)$ ; $\zeta=(\xi,\eta)$ ; $z'=(x',y')$ என்று கொண்டால், பெருக்கல் விதியின்படி

$$x'=x\,\xi-y\,\eta$$

$y'=x\,\eta+y\,\xi$ என்றாகும்.

$$\therefore \quad \xi=\frac{y\,y'+x\,x'}{x^2+y^2}$$

$\eta=\dfrac{x\,y'-y\,x'}{x^2+y^2}$ என்பது தெளிவு.

ஆனால், $x^2+y^2=|z|^2\neq 0$ என்றிருக்க வேண்டும். $|z|=0$ என்றால், $z\,\zeta=z^1$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு மூலம் என்பது கிடையாது.

## 1·3. இணைச் சிக்கலெண் (Conjugate Complex Number)

**வரையறை :**

$z=x+iy$ என்ற சிக்கல் எண்ணைக் குறித்தால், $x=R(z)$, $y=I(z)$ என்று எழுதலாம். அதாவது $z$-ன் மெய்ப் பகுதி $x$ என்றும், மெய்யிலாப் பகுதி $y$ என்றும் கருதுவோம். $z$-ன் இணைச் சிக்க லெண்ணை $x-iy=\bar{z}$ என்று வரையறுப்போம்.

எனவே, $z_1+z_2$ என்ற சிக்கலெண்ணின் இணைச் சிக்கலெண் $\bar{z}_1+\bar{z}_2$ என்பதும், $z_1\cdot z_2$ என்ற எண்ணின் இணைச் சிக்கலெண் $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ என்பதும் தெளிவு.

அதாவது, $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$$

மேலும், $z\cdot\bar{z}=(x,y)\cdot(x,-y)$

$$=(x^2+y^2,\,0)$$
$$=x^2+y^2$$
$$=|z|^2$$
$$z+\bar{z}=2x$$
$$=2R(z)$$
$$z\cdot\bar{z}=2iy$$
$$=2iI(z)$$

**தேற்றம் :**

இரண்டு சிக்கலெண்களின் பெருக்குத் தொகையின் மட்டு, அவைகளின் மட்டுகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமம்.

$$|z_1\cdot z_2|^2=z_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$$
$$=(z_1\cdot\bar{z}_1)\cdot(z_2\cdot\bar{z}_2)$$
$$=|z_1|^2\cdot|z_2|^2$$
$$\therefore\ |z_1\cdot z_2|=\pm|z_1|\cdot|z_2|$$

ஆனால் சிக்கல் எண்ணின் மட்டு எப்போதும் குறை (negative) யெண்ணாக இருப்பதில்லையாதலால்

$$|z_1\cdot z_2|=+|z_1|\cdot|z_2|$$

**தேற்றம் :**

இரண்டு சிக்கலெண்களின் கூட்டுத்தொகையின் மட்டு, அவைகளின் மட்டுகளின் கூட்டுத் தொகையைவிட அதிகமாக முடியாது.

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\cdot(\overline{z_1+z_2}) \\ &= (z_1+z_2)\cdot(\bar{z}_1+\bar{z}_2) \\ &= z_1\cdot\bar{z}_1+z_1\cdot\bar{z}_2+z_2\cdot\bar{z}_1+z_2\cdot\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2+2R(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2+2|z_1\cdot\bar{z}_2|+|z_2|^2 \\ &= |z_1|^2+2|z_1|\cdot|z_2|+|z_2|^2 \\ &= [|z_1|+|z_2|]^2 \end{aligned}$$

$$\therefore |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

**குறிப்பு :** அதேபோல் $|z_1-z_2| \geqslant |[|z_1|-|z_2|]|$

ஏனெனின் $|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2-2R(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2$

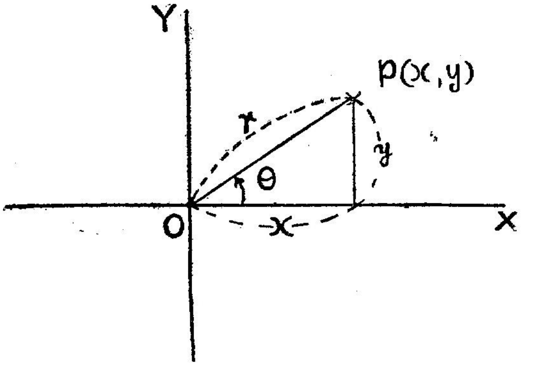
$$\begin{aligned} &\geqslant |z_1|^2-2|z_1\bar{z}_2|+|z_2|^2 \\ &\geqslant [|z_1|-|z_2|]^2 \end{aligned}$$

$$\therefore |z_1-z_2| \geqslant |(|z_1|-|z_2|)|$$

## 1·4. சிக்கலெண்ணை வடிவ கணித முறையில் குறிப்பிடுதல்

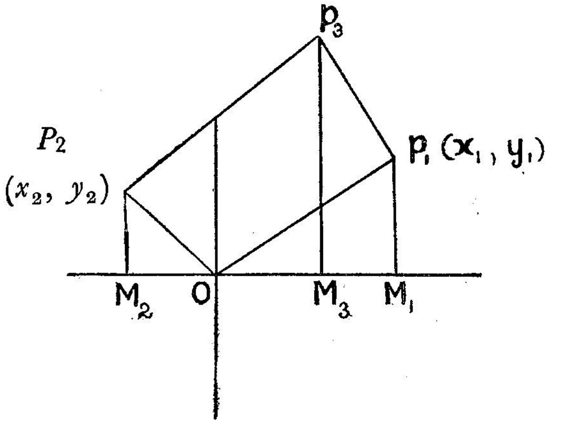
$(z^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=\gamma$ என்றும், $\gamma\cos\theta=x$, $\gamma\sin\theta=y$ என்றுமிருக்கும்படி $\theta$-வையும் குறித்தால் $P(x, y)$ என்ற புள்ளியின், ஆதியிலிருந்துள்ள தூரத்தை $\gamma$-யென்றும், $OP$ என்னும் கோடு, $OX$ என்னும் கோட்டுடன் உண்டாகும் கோணத்தை $\theta$ என்றும் குறிப்பிடுவோம். [இங்கு $OX$, $OY$ என்று இரு செங்குத்து அச்சுகளை எடுத்துக் கொண்டு $P(x, y)$ என்ற புள்ளியை அதன் அச்சுத் தூரத்தைக் கொண்டு குறிப்பதாகக் கொள்க.] அப்போது $(x, y)$ என்பது $P$-ன் கார்டீசியன் அச்சுத் தூரங்களாகவும், $(\gamma, \theta)$ என்பது கோண அச்சுத் தூரங்களாகவும் கொள்ளலாம். எனவே, $z=x+iy$ என்ற சிக்கலெண்ணை $(x, y)$ என்ற அச்சுத் தூரங்களைக் கொண்ட ஒரு புள்ளியாகக் கொள்வது ஒரு முறையாகும். அம்முறையை **ஆர்கண்ட்** (Argand) **வரைபட** முறை என அழைப்போம். இம் முறையில் $OX$ஐ மெய் அச்செனவும், $OY$ஐ மெய்யிலா அச்செனவும் கூறலாம். இங்குக்

கண்டுள்ள '$\theta$'வை **கோண வீச்சம்** (argument) எனக் கொள்ளலாம்.




படம் 1

இம் முறையின் மூலம், சிக்கலெண்களின் கூட்டல், பெருக்கல் இவைகளை எப்படிக் குறிப்பிடுவதென்பதை ஆராய்வோம்.




படம் 2

**1·4-1.** $P_1, P_2$ என்ற புள்ளிகள் $z_1$ $(=x_1+i\,y_1)$, $z_2$ $(=x_2+i\,y_2)$ என்ற இரு சிக்கலெண்களைக் குறிப்பதாகக் கொள்க.

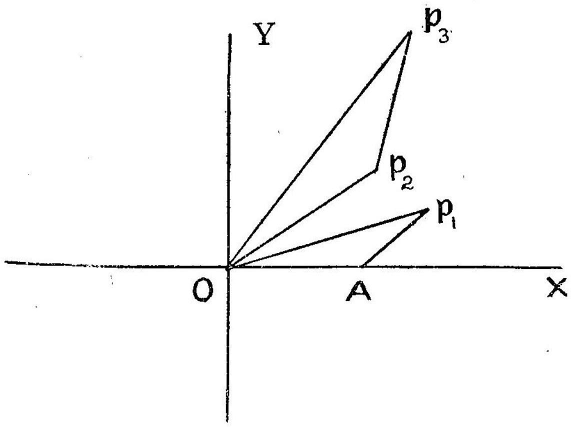
எனவே $OM_1=x_1$, $M_1\,P_1=y_1$

$OM_2=x_2$, $M_2\,P_2=y_2$ என்றாகும்.

$z_1+z_2$ என்ற எண்ணைக் குறிக்கும் புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்க, $OP_2$க்குச் சமமாகவும், இணையாகவும், $P_1$ வழியாக $P_1 P_3$ என்ற கோட்டை வரைக.

$OM_3=x_1+x_2$, $M_3 P_3=y_1+y_2$ என்பதை இலேசில் அறியலாம். அதாவது $P_3$ $(x_1+x_2, y_1+y_2)$ என்ற புள்ளி $z=(x_1+x_2)+i\ (y_1+y_2)$ என்ற $z_1$, $z_2$ களின் கூட்டுத்தொகையைக் குறிக்கும்.

**1·4-2.** $z_1$, $z_2$ என்ற சிக்கலெண்களை $P_1$ $(\gamma_1, \theta_1)$ ; $P_2$ $(\gamma_2, \theta_2)$ என்ற புள்ளிகளால் குறிப்பதாகக் கொள்க.




படம் 3

$z_1 \cdot z_2$ என்ற சிக்கலெண் குறிக்கும் புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்க.

மெய் அச்சில் $OA=1$ அலகு இருக்கும்படி $A$ என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொள்க. $OAP_1$ என்ற முக்கோணத்திற்கு வடிவொத்ததாக அமையும்படி, $OP_2$-ன் மேல் $OP_2P_3$ என்ற முக்கோணம் வரைக. $P_3$ என்ற புள்ளி $z_1 \cdot z_2$ என்ற எண்ணைக் குறிக்கும்.

$$\frac{OP_3}{OP_1}=\frac{OP_2}{OA}$$

$$OP_3=\frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2}{1}=\gamma_1 \cdot \gamma_2$$

$$\underline{|XOP}=\underline{|XOP_2}+\underline{|P_2OP_3}$$

$$=\underline{|XOP_2}+\underline{|XOP_1}$$

$$=\theta_2+\theta_1$$

எனவே, $z_1 \cdot z_2$ என்ற சிக்கலெண்ணின் மட்டு $z_1$, $z_2$ என்ற எண்களின் மட்டுகளின் பெருக்குத் தொகையாகவும், அதன் கோண

வீச்சம், $z_1$, $z_2$ என்ற எண்களின் கோண வீச்சங்களின் கூட்டுத் தொகையாகவும் இருப்பதைக் காண்க.

அதாவது, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

கோ. வீ. $(z_1 \cdot z_2)$ = கோ. வீ. $(z_1)$ + கோ. வீ. $(z_2)$

### 1·4·3. இரண்டு சிக்கலெண்களின் ஈவு

$$z_1 = x_1 + i\, y_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = x_2 + i\, y_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$z_2 \neq 0$ என்றிருந்தால்,

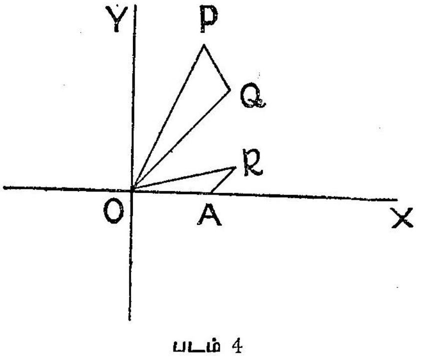
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1}{\cos \theta_2 + i \sin \theta_2} \cdot \frac{\cos \theta_2 - i \sin \theta_2}{\cos \theta_2 - i \sin \theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{[\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)]}{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \quad [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)]$$

அதாவது, $z_1$ஐ, $z_2$ஆல் வகுத்தால், $r_1$ என்ற $z$-ன் மட்டு $r_2$ என்ற $z_2$-ன் மட்டால் வகுபடுகிறது. ஆனால், $\frac{z_1}{z_2}$-ன் கோணவீச்சம் $\theta_1$ என்ற $z_1$-ன் கோண வீச்சுக்கும் $\theta_2$ என்ற $z_2$-ன் கோண வீச்சுக்குமுள்ள வித்தியாசமேயாகும்.

ஆர்கண்ட் வரைபட முறைப்படி இதைக் கவனிப்போம்.




படம் 4

ஆர்கண்ட் வரைபடத்தில் $z_1$, $z_2$ என்ற இரு சிக்கலெண்களை $P$, $Q$ என்ற புள்ளிகள் குறிக்கட்டும். $OX$ என்ற மெய் அச்சின்மேல் $A$ என்ற புள்ளி 1 என்ற மெய்யெண்ணைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். $\triangle OPQ$க்கு வடிவொத்ததாக $OA$-ன் மேல் $ORA$ என்ற

முக்கோணம் வரைக. அப்போது $R$ என்ற புள்ளி $z_1/z_2$ என்ற சிக்கலெண்ணைக் குறிக்கும்.

$$\frac{OR}{OA} = \frac{OP}{OQ}$$

$$OR = 1 \cdot \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\underline{|AOR} = \underline{|QOP} = \underline{|XOP} = \underline{|XOP} - \underline{XOQ}$$

$$= \phi_1 - \phi_2$$

## 1·5. ஆர்கண்ட் வரைபடத்தில் புள்ளிகளின் தொகுதி

ஆர்கண்ட் வரைபடத்தின் மூலம், சிக்கலெண்களைப் புள்ளிகளாகக் கொள்வதைப்பற்றிக் கண்டோம். இந்த வரைபடத்தின் உதவி கொண்டு, சிக்கலெண்களுக்கே உரித்தான சில பதங்களையும் அவைகளின் வரையறைகளையும் ஆராய்வோம்.

## 1·6. புள்ளிகளின் கணம்

ஆர்கண்ட் வரைபடம் கார்டீசியன் அச்சுகளைக்கொண்ட இருபரிமாண விளக்கப் படமேயாகும். இங்கு $(x, y)$ என்ற புள்ளியை $z\ (=x+i\ y)$ என்ற சிக்கலெண்ணால் குறிக்கிறோம். ஆனால் $z$ என்பது $(0, 0)$ என்ற ஆதி புள்ளியைக் குறிக்கும்போது $z' = \frac{1}{z}$ என்ற புள்ளி கந்தழியிலுள்ள வெளியைக் குறிப்பதாகக் கொண்டு அந்தப் புள்ளியைக் கந்தழிப் புள்ளியென்று கொள்வோம். $z$ புள்ளி பரவி நிற்கும் தளத்தை $z$தளம் என்போம். கந்தழிப் புள்ளியைத் தவிர்த்து மற்றவெல்லாப் புள்ளிகளையும் கொண்ட கணத்தை $z$-ன் **முழுமை தளம்** (whole plane) என்றும், கந்தழிப் புள்ளியைச் சேர்த்த கணத்தை $z$-ன் **விரிசமதளம்** (extended plane) என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

### 1·6·1. ஆர்கண்ட் வரைபடத்தில் $z_0$ என்ற புள்ளியின் சுற்று வட்டாரம் (Neighbourhood)

$z_0$ என்ற புள்ளியின் சுற்று வட்டாரம் என்பது $|z-z_0| < \epsilon$ $[\epsilon > 0]$ என்ற சமமின்மைக்குக் கட்டுப்பட்ட புள்ளிகள் '$z$' என்பவைகளின் கணம் (set) ஆகும். இங்கு $\epsilon > 0$ என்பதை ஏதாவதொரு மிகையெண்ணாகக் கொள்ளலாம்.

### 1·6·2. $s$ என்ற புள்ளிகளின் கணத்தின் வரம்புப் புள்ளி (Limit Point)

$s$ என்ற கணத்தின் வரம்புப் புள்ளி $z_0$ என்று கொண்டால், $z_0$-ன் ஒவ்வொரு சுற்று வட்டாரத்திலும், $s$ கணத்தின் புள்ளி ஒன்ருவது, அதைத் தவிர்த்து இருக்கவேண்டும்.

**குறிப்பு 1:** சுற்று வட்டாரத்தில் ஒரு புள்ளியிருக்கவேண்டு மென்ற நிபந்தனையின் மூலம், கந்தழி எண் புள்ளிகள் உள்ளன என்பது தெளிவு.

**குறிப்பு 2:** $s$ கணத்தின் வரம்புப் புள்ளி கணத்தின் உறுப்பாக இருக்கவேண்டுமென்பதில்லை. ஆனுல், கணத்தின் ஒவ்வொரு வரம்புப் புள்ளியும் கணத்தின் உறுப்பாகக் கொண்டால், கணத்தை மூடு கணம் (closed set) என்போம்.

வரம்புப் புள்ளியின் ஏதாவதொரு சுற்று வட்டாரத்திலுள்ள புள்ளிகள் எல்லாம் $s$ கணத்தின் உறுப்புகளென்ருல், வரம்புப் புள்ளியை உள் வரம்புப் புள்ளி (interior point) என்போம். உள் வரம்புப் புள்ளியில்லாத வரம்புப் புள்ளியை எல்லைப் புள்ளி (boundary point) என்போம்.

**குறிப்பு:** மேற்கண்ட வரையறையிலிருந்து கணம், மூடிய கண மாகவோ திறந்த கணமாகவோ அன்றி வேறு விதமாகவோ இருக்கலா மென்பது குறிப்பிடத்தக்கது. உதாரணமாக $|z|<1$ என்று அமையும் எல்லாப் புள்ளிகளையும் $z=1$ என்ற புள்ளியையும் சேர்த்த கணம் மூடு கணமுமன்று ; திறந்த கணமுமன்று.

### 1·7. ஜோர்டான் வளைகோடு (Jordan Curve)

$a \leq t \leq b$ என்றமையும் மெய்மாறி '$t$' ஆல் ஆன தொடர்ச்சி யான சார்புகள் இரண்டை $\varphi(t)$, $\Psi(t)$ என்று கொள்க. $x=\varphi(t)$, $y=\Psi(t)$, $a \leq t \leq b$ என்று $x$ ஐயும் $y$ ஐயும் வரையறுக்க. அப்போது கார்டீசியன் தளத்தில் $(x, y)$ என்ற புள்ளி ஒரு வளைகோட்டை நிர்ணயிக்கும். அங்கு $t$ என்ற மாறி $a$-க்கும் $b$-க்குமிடையே இருக்க வேண்டும். $z=x+iy$ என்று கொண்டால், ஆர்கண்ட் வரை படத்தில் $z$ ஒரு தொடர்ச்சியான வளைகோட்டை நிர்ணயிக்கும். இந்த வளைகோட்டை **ஜோர்டான் வளைகோடு** எனக் குறிப்பிடுவோம். இந்த வளைகோட்டில் மடங்குப் புள்ளிகள் (multiple points) இல்லை யென்ருல், இதைச் **சாதாரண ஜோர்டான் வளைகோடு** என்போம். $t=a$, $t=b$ என்று '$t$' மதிப்புகள் கொள்ளும்போது $z$-க்கு ஒரே ஒரு மதிப்பு இருந்தால், வளைகோட்டை, **மூடிய சாதாரண ஜோர்டான் வளைகோடு** எனக் குறிப்பிடுவோம்.

$(E)$ என்ற கணத்திலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் $|z| \leq K$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டிருந்தால், அந்தக் கணத்தை வரம்புடையது (bounded) என்றும், அப்படி நிபந்தனைக்குட்படக்கூடிய $K$ என்ற ஓர் எண்ணும் இல்லையென்றால் கணம் வரம்பில்லாததென்றும் கொள்ளுவோம்.

## 1·8. அரங்கம் (Domain)

ஆர்கண்ட் வரைபடத்திலுள்ள புள்ளிகளின் கணத்திலுள்ள புள்ளிகளின் கோடி ஒவ்வொன்றும், பல்கோண வில்லினால் (polygon arc) சேர்க்க முடிந்தால், அந்தக் கணத்தைக் கோனேக்ஸ் (Connex) என்போம். பல்கோண வில் கணத்தின் புள்ளிகளில்லாததாக இருக்கவேண்டுமென்பது நோக்கத்தக்கது. திறந்த கோனேக்ஸ் புள்ளிகளின் கணத்தை **திறந்த அரங்க** மென்போம். வரம்புப் புள்ளிகளையும் சேர்ந்த திறந்த அரங்கை **மூடிய அரங்க** மென்போம்.

### 1·8·1. ஜோர்டான் வளைகோட்டுத் தேற்றம்

மூடிய சாதாரண ஜோர்டான் வளைகோடு $z$-தளத்தை, வளைகோட்டைப் பொது வரம்பாகக் கொண்டு இரு திறந்த அரங்கங்களாகப் பிரிக்கிறது. இதில் ஓர் அரங்கம் வரம்புடையதெனின் அதை அகத்துள்ள (interior) அரங்கமென்போம். வரம்பில்லாத மற்ற அரங்கம் புறத்துள்ள அரங்கமாகும். உதாரணமாக $|z| = R$ என்ற வட்ட வளைகோடு $|z| < R$ என்ற அகத்துள்ள அரங்கத்தையும், $|z| > R$ என்ற புறத்துள்ள அரங்கத்தையும் நிர்ணயிக்கிறது என்பது நோக்கத்தக்கது.

**மாதிரிக் கணக்குகள்**

(1) $|f_1 - f_2|^2 + |f_1 + f_2|^2 = z|f_1|^2 + z|f_2|^2$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து

$$|\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}| + |\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}| = |\alpha + \beta| + |\alpha - \beta|$$

என நிறுவுக.

**நிறுவல் : பாகம் 1**

$$|f_1 - f_2|^2 = (f_1 - f_2)(\bar{f_1} - \bar{f_2}) = f_1\bar{f_1} - f_1\bar{f_2} - f_2\bar{f_1} + f_2\bar{f_2}$$

$$|f_1 + f_2|^2 = (f_1 + f_2)(\bar{f_1} + \bar{f_2}) = f_1\bar{f_1} + f_1\bar{f_2} + f_2\bar{f_1} + f_2\bar{f_2}$$

$$|f_1 - f_2|^2 + |f_1 + f_2|^2 = 2(f_1\bar{f_1} + f_2\bar{f_2})$$
$$= 2[|f_1|^2 + |f_2|^2].$$

**நிறுவல் : பாகம் 2**

$$[\,|\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,|+|\,\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,|\,]^2$$
$$=|\,\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,|^2+|\,\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,|^2+2\,|\,\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,|\;|\,\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,|$$
$$=2\,[\,|\,\alpha\,|^2+|\,\alpha^2-\beta^2\,|\,]+2\,|\,\alpha^2-(\alpha^2-\beta^2)\,|$$
$$=2\,|\,\alpha\,|^2+2\,|\,\alpha^2-\beta^2\,|+2\,|\,\beta\,|^2$$
$$=2\,[\,|\,\alpha\,|^2+|\,\beta\,|^2]+2\,|\,\alpha+\beta\,|\;|\,\alpha-\beta\,|$$
$$=[\,|\,\alpha-\beta\,|^2+|\,\alpha+\beta\,|^2]+2\,|\,\alpha-\beta\,|\;|\,\alpha+\beta\,|$$
$$=[\,|\,\alpha+\beta\,|+|\,\alpha-\beta\,|\,]^2$$
$$\therefore\;|\,\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,|+|\,\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,|=|\,\alpha+\beta\,|+|\,\alpha-\beta\,|$$

(2) $f(z)=\dfrac{x^3y\,(y-i\,x)}{x^6+y^2}$ $(z\neq 0)$, $z\,(0)=0$ என்றால்,

வேறெந்த வழியில் அல்லாமல் ஏதாவது ஓர் ஆரைத் திசையி (radius vector) வழி,

$$z\to 0 \text{ எனில் } \frac{f(z)-f(0)}{z}\to 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

**விடை :** $y=m\,x$ என்ற ஆரைத் திசையி வழி $z\to 0$ என்க.

அப்போது, $$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\left[\frac{x^3y\,(y-i\,x)}{x^6+y^2}\cdot\frac{1}{z}\right]$$
$$=\lim_{z\to 0}\left[\frac{-i\,x^3y\,(x+i\,y)}{x^6+y^2}\cdot\frac{1}{x+y}\right]$$
(ஏனெனில், $z=x+i\,y$)
$$=\lim_{z\to 0}\frac{-\,x^3y}{x^6+y^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-i\,m\,x^4}{x^6+m^2x^2}\quad(\because y=m\,x)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-i\,m\,x^2}{x^4+m^2}=0.$$

$z=x^3$ என்ற வளைகோட்டு வழி $z\to 0$ என்க.

அப்போது, $$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\left[\frac{x^3y\,(y-i\,x)}{x^6+y^2}\cdot\frac{1}{z}\right]$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{x^3y\,(y-i\,x)}{x^6+y^2}\cdot\frac{1}{x+i\,y}\quad\because z=x+i\,y$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{x^3\cdot x^3\,(x^2-i\,x)}{x^6+x^6}\cdot\frac{1}{x+i\,x^3}\quad(\because y=x^3)$$

$$= \lim_{f \to 0} \frac{x^2 - i\,x}{2\,(x + i\,x^3)}$$

$$= \lim_{f \to 0} \frac{x - i}{2\,(1 + i\,x^2)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - i}{2\,(1 + i\,x^2)}$$

$= \dfrac{-i}{2}$ • இது பூஜ்யமன்று.

## பயிற்சி 1

1. $f_1, f_2, f_3$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையத்தையும், சுற்று மையத்தையும் காண்க.

2. $\left|\dfrac{f-1}{f+1}\right|$ = மாறிலி, $\operatorname{amp}\dfrac{f-1}{f+1}$ = மாறிலி என்பவை குத்துவட்டங்களென நிறுவுக.

3. $f_1, f_2, f_3, f_4$ என்பவை ஒரே பரிதிப் புள்ளிகளென நிறுவுக. $z_1 = 2 + 3\,i$, $z_2 = 2 - 3\,i$, $z_3 = 4 - \sqrt{3}\,i$, $z_4 = 3 + 2\,i$.

4. $f_1, f_2, f_3$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகவுடைய முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க. [$z_1 = a_1 + b_1\,i$, $z_2 = a_2 + b_2\,i$, $z_3 = a_3 + b_3\,i$ என்று கொள்க.]

5. கணக்கு (4)-ல் உள்ள முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணமாக வேண்டின் $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = f_1\,f_2 + f_2\,f_3 + f_3\,f_1$ என்ற நிபந்தனை உண்மையாக இருக்க வேண்டுமென நிறுவுக.

# 2. சிக்கல் எண்ணின் சார்பலன்கள்

## (தொடர்ச்சி)

$z\ (=x+iy)$; $w\ (=u+iv)$ என்று இரு சிக்கலெண்களை எடுத்துக் கொள்க. $D$ என்ற அரங்கத்தில் $z$-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும், $D'$ என்ற அரங்கத்தில் $w$-க்கு ஒரு மதிப்பு இருத்தல் வேண்டும். அப்போது $w$-வை $z$-ன் சார்பலன், $w=f(z)$ என்று கூறுவோம்.

### 2·1· தொடர்ச்சி

$\epsilon > 0$ என்ற ஓர் எண் கொடுக்கப்பட்டால், அதற்கேற்ப $|z-z_0| < \delta$ என்றபடி $\delta$ அமைய வேண்டும். $|z-z_0| < \delta$ என்ற சமமின்மை சரி செய்யும் $D$ அரங்கத்திலுள்ள $z$ எண்கள் யாவும் $|f(z)-f(z_0)| < \epsilon$ என்றபடி இருந்தால் $z_0$ என்ற புள்ளியில் $f(z)$ தொடர்ச்சியாக வுள்ளதென்று கொள்வோம்.

**குறிப்பு :** $\delta$ என்ற எண், $\epsilon$ என்பதைப் பொறுத்தும், $z_0$ என்ற புள்ளியைப் பொறுத்தும் அமையுமென்பதை நோக்குக. ஆனுல், $z_0$ ஐச் சாராமல், $\epsilon$ ஐ மட்டும் பொறுத்து $\delta(\epsilon)$ அமைந்தால், $f(z)$-ன் தொடர்ச்சியை $D$ அரங்கத்தில் ஒரே **சீரான தொடர்ச்சி** (uniform continuity) என்போம்.

### 2·2. வகையிடத்தக்கமை (Differentiability)

$z_0$ என்ற புள்ளியில், $f(z)$ வகையிடத்தக்கதாக அமைய வேண்டின் $f(z)$ ஒரு மதிப்புள்ள சார்பலனுக வேண்டும். அதாவது, $D$ அரங்கத்திலுள்ள $z$-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும், $D'$ அரங்கத்தில், $w$-க்கு ஒரு மதிப்புதான் இருக்கவேண்டும்.

**வரையறை :** $z \to z_0$ என்ருகும்போது, $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ என்பது ஒரே ஒரு வரம்பை எட்டும் இயல்புடையதாக வேண்டும். அப்போது

$D$ அரங்கத்திலுள்ள $z_0$ என்ற புள்ளியில் $f(z)$ என்ற ஒரு மதிப்புள்ள சார்பலன் வகையிடத்தக்கமையுடையதென்போம். மேலே கண்ட $z$-ம் $D$ அரங்கத்திலேயே அமைய வேண்டும்.

$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ எட்டும் வரம்பை $z=z_0$ என்ற புள்ளியில் $f(z)$-ன் வகைக்கெழு (derivation) என்போம். அதை $f'(z_0)$ என்று குறித்துக் காட்டுவோம்.

இதைப் பகுவியல் முறைப்படி வரையறுப்போம். அதாவது $\epsilon > 0$ என்ற எண் கொடுக்கப்பட்டால், $0 < |z-z_0| < \delta$ என்ற சரியின்மையைச் சரி செய்யும் $D$ அரங்கத்திலுள்ள $z$, $z_0$ என்ற புள்ளிகள் யாவும் $\left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon$ சரிசெய்யும்படி $\delta$ என்ற எண்ணைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டும்.

**தேற்றம்:** தொடர்ச்சியாகவுள்ள ஒரு சார்பலன் வகையிடத் தக்கதாக இருக்க வேண்டியதில்லை என்பதை உதாரணத்துடன் விளக்குக.

$f(z) = |z|^2$ என்ற சார்பலனை நோக்குக. $z=0$ என்ற புள்ளியில்

$$|f(z)-f(z_0)| = \left| |z|^2 - 0 \right|$$

$$= |z|^2 < \epsilon \quad |z| < \sqrt{\epsilon} \text{ என்னும் போது}$$

$$\therefore \delta < \sqrt{\epsilon} \text{ என்று கொள்க.}$$

எனவே $z=0$ என்ற புள்ளியில், சார்பலன் தொடர்ச்சியாகவுள்ளது.

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z-z_0}$$

$$= \frac{z\bar{z} - z_0\bar{z}_0}{z-z_0}$$

$$= \bar{z} + z_0 \frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}$$

$$= \bar{z} + z_0 \frac{\gamma e^{-i\varphi}}{\gamma e^{i\varphi}}$$

$$[z - z_0 = \gamma e^{i\varphi} \text{ என்று கொள்ளும்போது}]$$

$$= \bar{z} + z_0 \cdot e^{-2i\varphi}.$$

$z-z_0=\gamma e^{i\varphi}$ என்பதால், $z$, $z_0$ஐ அணுகும்போது $\gamma\to 0$ என்றாகும். ஆனால் $\varphi$ க்கு எந்த மதிப்பும் எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

$\therefore\ \bar{z}+z_0 e^{-2i\varphi}$ என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட வரம்பை எட்டுவதில்லை.

ஆனால் $z_0=0$ என்று கொண்டால், $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\bar{z}\to 0,\quad z\to 0$ என்றிருக்கும்போது.

$z_0\neq 0$ என்று எடுத்துக்கொள்ளும்போது

$$f(z)-f(z_0)=|z|^2-|z_0|^2$$
$$=[\,|z|-|z_1|\,]\times[\,|z|+|z_0|\,]$$
$$\therefore\quad |f(z)-f(z_0)|<\epsilon[\,|z|+|z_0|\,]$$
$$<\epsilon'\ [\,|z-z_0|<\delta \text{ என்று}$$

கொள்ளும்போது.]

எனவே $z_0=0$ என்ற புள்ளியில், தொடர்ச்சியான சார்பலன் வகையிடத் தக்கதாயுள்ளது. ஆனால் $z_0\neq 0$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியான சார்பலன் வகையிடத்தக்கதல்ல.

**குறிப்பு :** $\left|\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\epsilon$ என்று கொண்டால்

$\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)=w$ என்க. $w$ என்பது $|w|<\epsilon$ என்றபடியுள்ள சிக்கலெண்ணாகும்.

$$\therefore\quad f(z)-f(z_0)=(z-z_0)\,[f'(z_0)+w]$$
$$\therefore\quad |f(z)-f(z_0)|=|z-z_0|\ |f'(z_0)+w|$$
$$\leq |z-z_0|\,[\,|f'(z_0)|+|w|\,]$$
$$<|z-z_0|\,[\,|f'(z_0)|+\epsilon]$$
$$<\epsilon'\ \ |z-z_0|<\delta \text{ என்னும் போது}$$
$$\therefore\quad f(z)\to f(z_0),\ |z-z_0|<\delta \text{ என்று கொள்ளும்போது}$$

அதாவது $f(z)$ என்ற சார்பலன் $z_0$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியானதாகும்.

**குறிப்பு :** $z=z_0$ என்ற புள்ளியில் ஒரு சார்பலனின் தொடர்ச்சியையும் வகையிடத்தக்கமையையும் வரையறுத்தோம். $D$ என்ற அரங்கிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் ஒரு சார்பலன் தொடர்ச்சியாக இருந்தால், சார்பலன் $D$ அரங்கில் தொடர்ச்சியாக உள்ளதென்போம். அதேபோல், அரங்கிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் சார்பலன் வகை

யிடத் தக்கதாகவுள்ள தென்றால், சார்பலன் $D$ அரங்கில் வகையிடத் தக்க தென்போம். அதையே $D$ அரங்கிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வகையிடத்தக்க தென்பதை சார்பலன் $D$ அரங்கில் **ஒழுங்கானது** (regular) எனக் குறிப்பிடுவோம்.

சில சமயங்களில், அரங்கிலுள்ள சில புள்ளிகளை தவிர்த்து மற்ற புள்ளிகளில், சார்பலன் வகையிடத்தக்கதாக இருந்தால், **அந்த புள்ளிகளை** (வகையிடத்தக்கதான புள்ளிகளை) சார்பலனின் **சிறப்புப் புள்ளிகள்** (singular points) என்போம். இப்போது சார்பலன் ஒழுங்கானதாக இருக்கவேண்டிய, போதுமான நிபந்தனைகளை கண்டு பிடிப்போம்.

## 2·3. சார்பலன் ஒழுங்கானதாக இருக்கவேண்டிய நிபந்தனைகள்

$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ என்று பிரித்துக்கொள்ளுவோம்.

$z=x+iy$ என்றால் $\triangle z=\triangle x+i\,\triangle y$. என்றாகும்.

$$\therefore\quad f(z+\triangle z)=u(x+\triangle x,y+\triangle y)+iv(x+\triangle x,y+\triangle y)$$

சார்பலன் வகையிடத்தக்கதாகவுள்ளதால் $\dfrac{f(z+\triangle z)-f(z)}{\triangle z}$ என்பது, $\triangle z$ எந்த வகையிலும் 0 வை எட்டும்போது, ஒரு தீர்மான மான வரம்பை எட்டவேண்டும். $\triangle y=0$ என்று கொண்டு $\triangle z$ஐ முழுமையும் மெய்யானதாக கொள்வோம்.

$$\therefore\quad \frac{f(z+\triangle z)-f(z)}{\triangle z}$$

$$=\frac{\{[u(x+\triangle x,y)+i\,v(x+\triangle x,y)]-[u(x,y)+i\,v(x,y)]\}}{\triangle x}$$

$$=\frac{u(x+\triangle x,y)-u(x,y)}{\triangle x}+\frac{i[v(x+\triangle x,y)-v(x,y)]}{\triangle x}$$

$\dfrac{f(z+\triangle z)-f(z)}{\triangle z}$ என்பது ஒரு வரம்பை எட்டவேண்டும்.

எனவே $\dfrac{u(x+\triangle x,y)-u(x,y)}{\triangle x}$ ம் $\dfrac{v(x+\triangle x,y)-v(x,y)}{\triangle x}$ ம் தனித்தனியே வரம்புகளை எட்டவேண்டும். ஆகவே $ux$, $vx$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுக்கள் இருத்தல் வேண்டும். மேலும் $\dfrac{f(z+\triangle z)-f(z)}{\triangle z}$ ன் வரம்பு $ux+i\;vx$ என்றாகும். அதேபோல், $\triangle x=0$ என்று கொண்டு $\triangle z$ஐ $i\,\triangle y$ என்று முழுமையான சிக்கலெண்ணாகக் கொண்டால் $\dfrac{f(z+\triangle z)-f(z)}{\triangle z}$ ன் வரம்பு $vy-i\;uy$

ஆகும். $\triangle z$, 0வுக்கு எப்படி எட்டினலும், $\dfrac{f(z+\triangle z)-f(z)}{\triangle z}$ ன் வரம்பு ஒன்ருகவே இருக்கவேண்டும். எனவே

$$ux+i\,vx=vy-i\,uy$$

$$\therefore\quad ux=vy$$

$$uy=-vx$$

இந்த இரு தொடர்புகளை **கோசி-இரைமன்** (Cauchy-Rimann) **வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்** என்போம். எனவே, ஒரு புள்ளியில் வகையிடத் தக்க சார்பலனின் $ux$, $uy$, $vx$, $vy$ என்ற நான்கு பகுதி வகைக்கெழுக்கள் இருக்கவேண்டும். மேலும் அந்த நான்கு பகுதி வகைக்கெழுக்கள் கோ. இ (C. R.) சமன்பாடுகளை சரி செய்ய வேண்டும்.

## 2·3·1. சார்பலன் வகையிடத்தக்க போதிய நிபந்தனைகள்

$w=f(z)$ என்று கொண்டால் $f(z+\triangle z)-f(z)=w+\triangle w$ என்ருகும்.

$w=u+i\,v$ என்பதால், $w+\triangle w$ என்பது $u+\triangle u+i\;(v+\triangle u)$ என்ருகும்.

$$\begin{aligned}\therefore \triangle u &= u\,(x+\triangle x, y+\triangle y)-u\,(x,y)\\ &= u\,(x+\triangle x, y+\triangle y)-u\,(x+\triangle x, y)\\ &\quad +u\,(x+\triangle x, y)-u\,(x,y)\\ &= \triangle y\; uy\,(x+\triangle x, y+\theta\;\triangle y)\\ &\quad +\triangle x\; ux\,(x+\theta'\;\triangle x, y)\end{aligned}$$

[இடை மதிப்புத் தேற்றத்தின்படி $0<\theta<1$
$0<\theta'<1$ என்று கொள்ளலாம்.]

$ux$, $uy$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுக்களை தொடர்ச்சியான சார்பலன்களாகக் கொண்டால்

$$\triangle u=\triangle y\;[u_y\,(x,y)+\epsilon]+\triangle x\;[ux\,(x,y)+\epsilon']$$

என்ருகும். இங்கு $|\triangle z|\to 0$ என்ருகும் போது $\epsilon$, $\epsilon'$ என்ற இரண்டும் பூச்சியத்தை எட்டும். இதே போல்

$$\triangle v=\triangle x\;[v_x\,(x+y)+\eta]+\triangle y\;[v_x\,(x,y)+\eta']$$

இங்கும் $|\triangle z|\to 0$ என்னும்போது $\eta$, $\eta'\to 0$ ஆகும்.

$$\begin{aligned}\therefore\quad \triangle w &= \triangle u+i\triangle v\\ &= \triangle x\;[u_x+i\,v_x]+\triangle y\;[u_y+i\,v_y]\\ &\quad +\triangle x\;[\epsilon'+i\eta]+\triangle y\;[\epsilon+i\,\eta']\end{aligned}$$

$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ என்பதால்

$$\begin{aligned}u_y+i\,v_y &= -v_x+iu_x\\ &= i\,[u_x+i\,v_x]\end{aligned}$$

$$\therefore\ \triangle w=(u_x+i\,v_x)\,(\triangle x+i\triangle y)$$
$$+\lambda\triangle x+\lambda'\triangle y$$

[இங்கு $|\triangle z|\to 0$ என்னும் போது $\lambda$, $\lambda'$ என்ற இரண்டும் $\to 0$ ஆகும்.]

எனவே $\triangle x+i\ \triangle y=\triangle z$ என்பதால் வகுத்து $|\triangle z|\to 0$ என்று எடுத்துக்கொள்ளும்போது

$$\frac{dw}{dz}=u_x+i\ v_x \text{ என்றுகும்}$$

$$\frac{dw}{dz}=v_y+i\ v_x$$
$$=v_y-i\ u_y$$
$$=u_x-i\ u_y \text{ என்றும் கொள்ளலாம்.}$$

**குறிப்பு :** $u$, $v$ என்ற சார்புகளின் இரண்டாவது பகுதி வகைக் கெழுக்கள் தொடர்ச்சியுள்ள சார்பலன்களாயின், $u_{xy}=u_{yx}$ ; $v_{xy}=v_{yx}$ என்றுகும்.

$u_x=v_y$ என்பதால், இதை $x$ஐ பொருத்து பகுதி வகைக்கெழு காணின் $u_{xx}=v_{yx}$ என்றுகும்.

அதேபோல் $u_y=-v_x$ என்பதில் $y$ஐ பொருத்து பகுதி வகைக் கெழு கண்டால் $u_{yy}=-v_{xy}$

$$\therefore\ u_{xx}+u_{yy}=0$$

அதேபோல் $v_{xx}+v_{yy}=0$ என்றுகும்.

ஆகவே $u$, $v$ என்பவை

$$\nabla^2\varphi\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

என்ற இலாப்பிளாஸ் (Laplace) சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

### 2·3·2. கோசி-இரைமன் நிபந்தனைகள் ஒரு சீரான சார்பலன் ஒழுங்கானதாகவுள்ளதிற்கு போதுமான நிபந்தனையல்ல வென்று காண்பிக்கும் உதாரணங்கள்

1. $f(z)=\sqrt{|xy|}$ என்ற சார்பலனை கவனிக்க.

$f(z)=u\ (x,y)+i\ v\ (x,y)$

என்பதால் $u\ (x,y)=\sqrt{|xy|}$, $v\ (x,y)=0$ என்றுகும்.

$$u_x\ (o,o)=\lim_{x\to 0}\ \frac{u\ (x,o)-u\ (o,o)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\ \frac{o-o}{x}=0$$

அதேபோல்

$$u_y\ (o, o) = \underset{y \to 0}{lt} \quad \frac{u\ (o, o) - u\ (o, o)}{y}$$
$$= 0$$

$$v_x\ (o, o) = 0, \quad v_y\ (o, o) = 0$$

$\therefore$ $(o, o)$ என்ற புள்ளியில் $u_x = v_y$, $u_y = -v_y$ என்ற கோசி-இரைமன் நிபந்தனைகளை $u$, $v$ சரி செய்வதை காண்கிறோம்.

$$\text{ஆனால் } \frac{f\ (z) - f\ (o)}{z} = \frac{\sqrt{|\ xy\ |}}{x + iy}$$

இப்போது $z$, $o$ வை அணுகுவதாகக் கொள்ளுவோம். எந்த பாதையின் வழியாக $z$, $o$ ஐ நெருங்கினாலும் $\frac{f\ (z) - f\ (o)}{z}$ ஒரே வரம்பை எட்டவேண்டும்.

$y = mx$ என்ற பாதையின் வழியாக $z$, $o$ வை நெருங்குவதாகக் கொள்ளுவோம்.

$$\frac{f\ (z) - f\ (o)}{z} = \frac{\sqrt{|\ x \cdot mx\ |}}{x + imx}$$
$$= \frac{\sqrt{|\ m\ |}}{1 + im}$$

எனவே $\frac{f\ (z) - f\ (o)}{z}$ ன் வரம்பு '$m$' வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு மாறுபடுகிறது. அதாவது $f'\ (o)$ க்கு ஒரே ஒரு மதிப்பு இல்லாததால் $f\ (z)$ க்கு $z = 0$ என்ற புள்ளியில் வகைக்கெழு கிடையாதென்பது தெளிவு.

2. $f\ (z) = \frac{x^3\ (1 + i) - y^3\ (1 - i)}{x^2 + y^2}$ $\quad (z \neq 0$ என்றால்)

$\quad = 0 \quad (z = 0$ என்றால்)

என்ற சார்பலனை நோக்குவோம். இந்த சார்பலனுக்கு $z = 0$ என்ற புள்ளியில் ஒரு மதிப்பும், $z \neq 0$ என்ற புள்ளிகளில் வேறு மதிப்புகளுமிருப்பதை கவனிக்க.

$$f\ (z) = u\ (x, y) + i\ v\ (x, y)$$

$$u\ (x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \quad v\ (x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}. \quad x, y \neq 0 \text{ என்றால்}$$

$$u\ (x, y) = 0, \quad v\ (x, y) = 0$$

$x = y = 0$ என்றால்

$$u_x\ (o, o) = \underset{x \to 0}{lt} \quad \frac{u\ (x, o) - u\ (o, o)}{x}$$

$$u_x(o,o) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/x^2 - o}{x} = 1$$

$$u_y(o,o) = \lim_{y\to 0} \frac{u(o,y) - u(o,o)}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-y^3/y^2 - 0}{y} = -1$$

$$v_x(o,o) = \lim_{x\to 0} \frac{v(x,o) - v(o,o)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3/x^2 - 0}{x} = 1$$

$$v_y(o,o) = \lim_{y\to 0} \frac{v(o,y) - v(o,o)}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y^3/y^2}{y} = 1$$

$\therefore$ $z=0$ என்ற புள்ளியில் $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$

ஆனல் $y = m\,x$ என்ற பாதையின் வழியே

$$\frac{f(z) - f(o)}{z} = \frac{x^3(1+i) - m^3x^3(1-i)}{(x^2+m^2x^2)(x+i\,m\,x)}$$

$$= \frac{(1+i) - m^3(1-i)}{(1+m^2)(1+i\,m)}$$

இப்போது $z \to 0$ என்ருகும்போது $\dfrac{f(z)-f(0)}{z}$ க்கு '$m$' ஐ பொருத்து வெவ்வேறு மதிப்புகள் கிடைக்கும். எனவே $z=0$ என்ற புள்ளியில் $f(z)$க்கு வகைக்கெழு கிடையாது.

3. $f(z) = e^{-1/z^4}$ $\qquad z \neq 0$ என்ருல்

$\quad = 0$ $\qquad z = 0$ என்ருகும்போது

$$\therefore u_x(o,o) = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,o) - u(o,o)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^4}}{x} = 0$$

$$u_y(o,o) = \lim_{y\to 0} \frac{u(o,y) - u(o,o)}{y}$$

$$= \underset{x \to 0}{lt} \frac{e^{-1/y^4}}{y} = 0 \quad [i^4 = 1 \text{ என்பது தெளிவு.}]$$

$$v_x(o, o) = \underset{x \to 0}{lt} \frac{v(x, o) - v(o, o)}{x}$$

$$= \underset{x \to 0}{lt} \frac{0-0}{x} = 0$$

$$v_y(o, o) = \underset{y \to 0}{lt} \frac{v(o, y) - v(o, o)}{y}$$

$$= \underset{y \to 0}{lt} \frac{0-0}{y} = 0$$

∴ கோ. இ. நிபந்தனைகளுக்கு $u, v$ கட்டுப்பட்டிருக்கின்றன.

$y = x$ என்ற பாதையின் சமன்பாடு

$z = \gamma e^{i\pi/4}$ என்பது தெளிவு

எனவே $y = x$ என்ற பாதையின் வழியே

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{e^{-1/z^4}}{z}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{\gamma^4 e^{i\pi}}}}{\gamma e^{i\pi/4}}$$

$$= \frac{e^{1/\gamma^4}}{\gamma e^{i\pi/4}}$$

$\to \infty$, $\gamma \to 0$ அல்லது $z \to 0$ என்ருகும்போது

∴ $f(z)$ என்ற சார்பலன் $z = 0$ என்ற புள்ளியில் ஒழுங்கானதல்ல.

**மாதிரி கணக்கு :**

1. $e^x (\cos y + i \sin y)$ என்பது ஒழுங்கான சார்பென்று நிறுவுக. அதன் வகைக்கெழு என்ன ?

**விடை :** $e^x (\cos y + i \sin y) = u + i v$ என்க.

$\therefore u = e^x \cos y$

$v = e^x \sin y.$

$\therefore u_x = e^x \cos y, \quad v_x = e^x \sin y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_y = e_x \cos y.$

$\therefore\ u_x = v_y\ ;\quad -v_x = u_y.$

∴ கோசி-இரைமன் நிபந்தனைகள் நிறைவேறின.

∴ $e^x(\cos y + i\sin y)$ ஆனது ஒழுங்கான சார்பு ஆகும்.

$$\therefore\ f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\cos y + i\,e^x\sin y$$
$$= e^x(\cos y + i\sin y)$$

2. $f(z)$ என்பது $z$ன் ஒழுங்கான சார்பலன் எனின்
$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4\,|f^1(z)|^2$ என்று நிறுவுக.

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ என்க. சார்பலன் ஒழுங்கானது என்பதால்,

$u_x = v_x\ ;\quad u_y = -v_x\quad \therefore\ u_{xx} = v_{yx} = -u_{yy}\quad ||| \text{ by }\ v_{xx} = -v_{yy}$

$|f(z)|^2 = u^2 + v^2$

$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2 = 2\,u\,u_x + 2\,v\,v_x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2 = 2\,[u\,u_{xx} + u_x^2 + v\,v_{xx} + v_x^2]$$

$$|||\text{ by }\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2 = 2\,[u\,u_{yy} + u_y^2 + v\,v_{yy} + v_y^2]$$

$$\therefore\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = \underline{2\,[u\,(u_{xx}+u_{yy}) + v\,(v_{xx}+v_{yy})}$$
$$+ (u_x^2 + u_y^2) + (v_x^2 + v_y^2)]$$
$$= 2\,[(u_x^2 + v_x^2) + (u_y^2 + v_y^2)]$$

$f^1(z) = u_x + i\,v_x$

அல்லது $= v_y - i\,v_x$

$$\therefore\ |f^1(z)|^2 = (u_x^2 + v_x^2) = (v_y^2 + v_x^2)$$

$$\therefore\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 2\,[\,|f'(z)|^2 + |f'(z)|^2]$$
$$= 4\,|f'(z)|^2$$

## பயிற்சி 2

1. ஆர்கண்ட் வரைபடத்தில் கீழ்க்கண்ட சமமின்மைகள் குறிக்கும் பகுதிகளை நிர்ணயிக்கவும்.

(i) $|z^2 - z| < 1$

(ii) $|z-a| + |z-b| \leq k\ (k > 0)$

2. $x=\gamma\cos\theta,\ y=\gamma\sin\theta$ என்றால் கோசி-இரைமன் நிபந்தனைகளை $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial v}{\partial\theta}$ ; $\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\gamma\frac{\partial v}{\partial\gamma}$ என்று மாற்றியமைக்கலாமென நிரூபி.

3. $f'(z)\neq 0$ என்று அமையும்படி $w=f(z)$ என்ற சார்பலன் ஒழுங்கானதெனின்,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\log|f'(z)|=0$$ என்று காண்பி.

4. $f(z)=u+iv$ என்பது $x$ ஐப் பொருத்து ஒரு ஒழுங்கான சார் பலனென்றால்,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^p=p^2|f(z)|^{p-2}\ |f'(z)|^2$$ என நிறுவுக.

5. தனிப்பெறுமானம் மாறிலியாகக் கொண்ட ஒழுங்கான சார்பும் மாறிலியென நிறுவுக.

6. $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=4\frac{\partial^2}{\partial z\cdot\partial\bar{z}}$$ என நிறுவுக.

7. $u=e^{-x}[(x^2-y^2)\cos y+2xy\sin y]$ என்றால் ஒழுங்கான சார்பு $u+iv$ ஐ காண்க.

# 3. இணங்கசார்பை விளக்கம்
## (Conformal Representation)

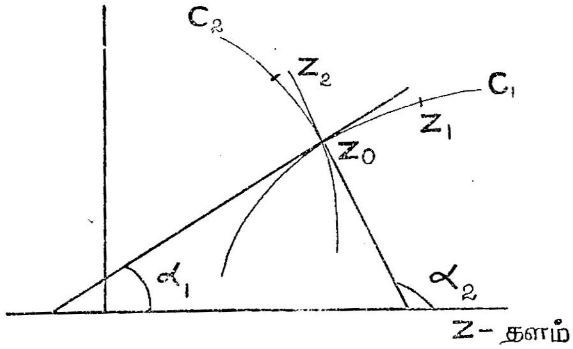
### 3·1. இணங்கசார்பை மாற்றம் : வரையறை

$u=u\ (x,y)$ ; $v=v\ (x,y)$ என்ற இருதொடர்புகளைக் கவனிக்கவும். இந்த சமன்பாடுகள் $(x,y)$ என்ற புள்ளிகளுள்ள தளத்திலுள்ள $D$ என்ற அரங்கத்திற்கும் $(u,\ v)$ என்ற புள்ளிகளைக் கொண்ட தளத்திலுள்ள $D'$ என்ற அரங்கத்திற்குமிடையே ஒரு தொடர்பை உண்டாக்குகிறது.

$D$ அரங்கத்திலுள்ள புள்ளிகள் யாவற்றிலும், $u$, $v$ என்ற சார்புகள் தொடர்ச்சியானதாகவும், முதல் ஒழுங்கு (first order) பகுதி வகைக்கெழுக்கள் கொண்டதாகவுமிருந்தால், தொடர்ச்சியாக திரும்பும் தொடுகோடுகளைக் கொண்ட $D$ அரங்கத்திலுள்ள எந்த வளைகோடும், அதே தன்மையை கொண்ட $D'$ அரங்கத்திலுள்ள வளைகோடாக மாறும். ஆனால் இந்த மாற்றம் ஒன்றுக்கு ஒன்றான (one to one) தல்ல. உதாரணமாக $u=x^2$, $v=y^2$ என்ற தொடர்புகளை நோக்கவும். $D$ அரங்கத்தில் $x^2+y^2\leq 1$ என்ற வட்ட அரங்கம் $D'$ அரங்கத்தில் $u=0$, $v=0$, $u+v=1$ என்ற கோடுகளாலான முக்கோண அரங்கமாக மாறும். ஆனால் முக்கோணத்தின் ஒரு புள்ளியாக மாற வட்டத்தில் நான்கு புள்ளிகள் இருப்பது கவனிக்கத்தக்கது. $[\pm\alpha,\ \pm\beta]$ என்ற நான்கு புள்ளிகள் $D'$ அரங்கத்தில் ஒரே ஒரு புள்ளியாகத்தான் மாறும்.

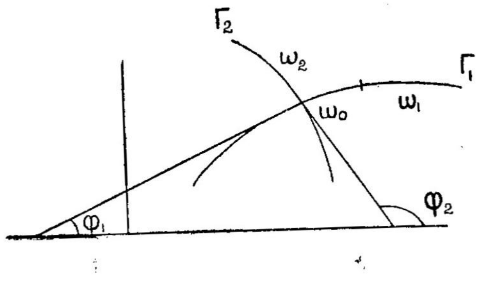
$D$ அரங்கத்திலுள்ள இரு வளைகோடுகள் $P\ (x_0,\ y_0)$ என்ற புள்ளியில் '$\theta$' என்ற கோணத்தில் வெட்டட்டும். அப்போது $D'$ அரங்கத்திலுள்ள ஒத்த வளைகோடுகள் $P'\ (u_0,\ v_0)$ $[u_0=u\ (x_0,\ y_0)$ ; $v=v\ (x_0, y_0)]$ என்ற ஒத்த புள்ளியில் அதே '$\theta$' கோணத்தில் வெட்டினால் இந்த மாற்றத்தை **கோணம் போற்றும் மாற்றம்** (Isogonal Transformation) என்று கூறலாம்.

இந்த மாற்றத்தின் மூலம், கோணத்தின் அளவு மட்டுமல்லாது, திரும்பும் திசையும் (sense of rotation) மாருமலிருந்தால், மாற்றத்தை **இணங்கு சார்பை மாற்றம்** (Conformal Transformation) என்போம்.




படம் 5

இம்மாற்றம் ஒன்றுக்கொன்ருன தல்ல என்று கண்டோம். அப்படியல்லாது, $D$யிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும், $D'$ல் ஒரே ஒரு புள்ளி சார்பாகவும், $D'$யிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் $D$ல் ஒரே ஒரு புள்ளி சார்பாகவும் அமைந்தால், மாற்றத்தை **ஒன்றுக்கொன்ருன மாற்றம்** என்போம்.




படம் 6

**குறிப்பு:** $z$ தளத்திலுள்ள $D$ அரங்கத்தில் $w=f(z)$ என்ற சார்பலன் முறையுடையதெனக் கொள்ளுவோம். $D$ அரங்கத்தினுள் $z_0$ என்ற உட்புள்ளியையும் அதன் வழியே செல்லும் இருதொடர்ச்சியான வளைகோடுகள் $C_1$, $C_2$ என்பவைகளை கவனிக்க. இரு வளைகோடுகளுக்கும் $z_0$ என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் மெய்யான அச்சுடன் $\alpha_1$, $\alpha_2$ என்ற கோணங்களை உண்டாக்கட்டும். $f^1(z_0, \neq 0$ என்றும் கொள்ளுக. $z_0$ என்ற புள்ளிக்கு அருகே $C_1$, $C_2$ என்ற வளைகோடுகளின் மேல், $\gamma$ என்ற தூரத்தில் $z_1$, $z_2$ என்ற

புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்ளுக. எனவே $z_1 - z_0 = \gamma\ e^{i\theta_1}$ ; $z_2 - z_0 = \gamma\ e^{i\theta_2}$ என்றாகும். அப்போது $\gamma \to 0$ என்றாகும்போது $\theta_1 \to \alpha_1$ ; $\theta_2 \to \alpha_2$ என்றாகும். $w = f(z)$ என்ற மாற்றம் ஏற்படும்போது, $z$ தளத்திலுள்ள $z_0$ என்ற புள்ளிக்கு ஒப்பாக $w$ தளத்தில் $w_0$ என்ற புள்ளியும், $z_1$, $z_2$ என்ற புள்ளிகளுக்கு ஒப்பாக $w_1$, $w_2$ என்ற புள்ளிகளும் இருப்பதாகக் கொள்ளுக. $w_1$, $w_2$ என்ற புள்ளிகள் $w$ தளத்தில் $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ என்ற வளைகோடுகளை நிர்ணயிக்கட்டும்.

எனவே $w_1 - w_0 = P_1 e^{i\varphi_1}$ ; $w_2 - w_0 = P_2 e^{i\varphi_2}$ என்று கொண்டால் $\underset{z_1 \to z_0}{lt} \dfrac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = f^1\ (z_0)$ என்றாகும். $f^1\ (z_0) \neq 0$ என்பதால், $f^1\ (z_0) = Re^{i\lambda}$ என்று கொள்ளுவோம்.

$$\therefore\ lt\ \frac{P_1 e^{i\varphi_1}}{\gamma e^{i\theta_1}} = Re^{i\lambda}$$

$$\therefore\ lt\ \frac{P_1}{\gamma} = R. \quad \text{மேலும்}\ lt\ (\varphi_1 - \theta_1) = \lambda$$

ஆகவே $lt\ \varphi_1 = \alpha_1 + \lambda$.

$\therefore$ $w_0$ என்ற புள்ளியில், $\Gamma_1$ வளைகோட்டிற்கு வரையப்படும் தொடுகோடு $w$ தளத்திலுள்ள மெய்யான அச்சுடன் $(\alpha_1 + \lambda)$ என்ற கோணத்தை உண்டாக்குகிறது. அதேபோல், $w_0$ புள்ளியில் $\Gamma_2$ வளைகோட்டிற்கு வரையப்படும் தொடுகோடு $(\alpha_2 + \lambda)$ என்ற கோணத்தை உண்டாக்கும். எனவே $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ என்ற வளைகோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் $(\alpha_2 + \lambda) - (\alpha_1 + \lambda) = (\alpha_2 - \alpha_1)$. ஆகவே $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ என்ற வளைகோடுகள் வெட்டும் கோணம், $C_1$, $C_2$ என்ற வளைகோடுகள் வெட்டும் கோணத்திற்கு சமமாகும். மேலும் $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ என்ற வளைகோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் திரும்பும் திசையும், $C_1$, $C_2$ என்ற வளைகோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தை போன்றது. ஒரு மாற்றத்தின் ஜக்கோபியன் $J$, ஒரு புள்ளியில் மறையாமலிருந்தால், அதாவது $J \neq o$ என்றால், திரும்பும் திசை மாறாமலிருக்கும். அப்போது $J > o$ என்றிருக்கவேண்டும். $J < o$ என்றால் திரும்பும் திசை மாறும். இங்கு $J = |f^1 (z_0|^2$. எனவே $f^1\ (z_0) \neq o$ என்பதால் $J > o$ ஆகும். ஆகவே திரும்பும் திசை மாறாமலிருக்கும்.

$\therefore f_1\ (z_0) \neq 0$ என்று கொண்டால், $w = f\ (z)$ என்ற முறையான சார்பலன் ஒரு இணங்கு சார்பை மாற்றத்தை நிர்ணயிக்கும். $f'\ (z_0) = 0$ என்றால், $w = f\ (z)$ என்பது இணங்கு சார்பலனாகாது. அப்படியுள்ள புள்ளிகளை இணங்கு சார்பை **முறிவுப் புள்ளிகள்** (critical points) என்போம்.

சில மாற்றங்களில் கோணங்களின் அளவுகள் மாருமலிருக்கும். ஆனுல் அவைகளின் குறிகள் மாறுபட்டிருக்கும்.

உதாரணமாக $w = x - iy$ என்ற மாற்றத்தை கவனிப்போம். இங்கு $x+iy$ என்ற புள்ளிகள் $x-iy$ என்று மாறுவதால், புள்ளிகள், மெய் அச்சை பொருத்து பிரதிபலிப்பாகின்றன. எனவே கோணங்களின் அளவுகள் மட்டும் மாருமலிருக்கும். பொதுவாக $w = f(\bar{z})$ என்ற மாற்றம் மேற்கண்ட தன்மையுடையதாக இருக்கும். இங்கு $f(z)$ ஒழுங்கான சார்பலனுகும். $Z = \bar{z}$ ; $w = f(z)$ என்ற இரு மாற்றங்களின் சேர்க்கையே $w = f(\bar{z})$ என்ற மாற்றமாகும்.

## 3·2. இசை சார்பலன்கள் (Harmonic Functions)

$\nabla^2 v = 0$ அல்லது $\dfrac{\partial v^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial v^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial v^2}{\partial z^2} = 0$ என்ற இலாப்லாஸ் (Laplace) சமன்பாடுகளை கவனிக்க. இதன் மூலங்கள், $x, y, z$ இவைகளை பொருத்து பல சார்பலன்களாகும். இந்த சார்பலன்களை இசை சார்பலன்களென்போம்.

முப்பரிமாண வெளியில், $x = \varphi_1(\xi, \eta, \varphi)$, $y = \varphi_2(\xi, \eta, \varphi)$, $z = \varphi_3(\xi, \eta, \varphi)$ என்ற மாற்றங்களினுல், $v(x, y, z)$ என்ற சார்பலன் $v^1(\xi, \eta, \varphi)$ என்ற சார்பலனுக மாறுவதாகக் கொள்ளுவோம். $v(x, y, z)$ என்பது இசை சார்பலனுக இருப்பினும், $v^1(\xi, \eta, \varphi)$ என்பது இசை சார்பலனுக இருப்பதில்லை. ஆனுல் இரட்டை பரிமாண வெளியில் இந்த மாற்றத்தின் விளைவை விரிவாக நோக்குவோம்.

$w = f(z)$ என்ற மாற்றத்தை நோக்குக. இங்கு $w = u + iv$, $z = x + iy$ என்றும் கொள்ளுவோம். அப்போது $u = u(x, y)$ ; $v = v(x, y)$ என்ருகும். $f(z)$ என்பதை ஒழுங்கான சார்பலனுகவும் $(x, y)$ தளத்தைக் கொண்ட $D$ அரங்கத்தில் $f'(z) \neq 0$ என்றும் கொள்ளுவோம்.

$w = f(z)$ என்ற மாற்றத்தினுல், $D$ அரங்கத்துக்கு இணையாக $(u, v)$ தளத்தில் $\triangle$ அரங்கம் அமைவதாக.

$x, y$ என்பவை சார்பற்ற மாறிலிகளாகவும், $w$ என்பது $x, y$ என்பவைகளைக் கொண்ட இருமுறை வகையீடு செய்யும்படியான சார்பலனுகுக.

$$\therefore\ d^2w = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\, du^2 + 2\,\frac{\partial^2 w}{\partial u\, \partial v}\cdot du\, dv + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\, dv^2 + \frac{\partial w}{\partial u}\cdot d^2u + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot d^2v \qquad \text{—(A)}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy$$

$$\therefore\ d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2$$

$$d^2v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,dy^2$$

$(A)$ல் $du$, $dv$, $d^2u$, $d^2v$ என்பவற்றின் மதிப்புகளை இடவும். $d^2w$ என்பது $dx$, $dy$ என்பவைகளில் இருபடிக் கோவையாக அமையும். $dx^2$, $dy^2$ இவைகளின் கெழுக்களைக் கொண்டு

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial v}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

என்று காணலாம்.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

என்பதால்

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\therefore\ |f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \neq 0.$$

$\therefore\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ எனின்

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$ என்ருகும்.

### 3·3. இரு நேர்கோட்டு மாற்றம் (Bilinear Transformation)

$w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ —$(A)$ என்ற மாற்றத்தை இரு நேர்கோட்டு மாற்றமென்போம். இங்கு $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ என்பவை சிக்கலெண்களாகும். $\alpha\delta-\beta\gamma$ என்பதை மாற்றத்தின் அணிக்கோவை என்போம்.

$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ எனின் $w$ ன் ஒரு மதிப்புக்கு பொருந்துமாறு $z$ க்கு ஒரே ஒரு மதிப்புத்தானிருக்கும். இதை **மோபீஸ் மாற்றம்** (Mobius Transformation) எனவும் கூறலாம். இப்போது (1) $w=z+a$ (2) $w=pz$ ($p$ என்பது மெய்யெண்ணாகுக) (3) $w=z\,e^{i\theta}$ (4) $w=\dfrac{1}{z}$ என்ற மாற்றங்களை விரிவாக கவனிப்போம்.

(1) $w=z+a$ என்பது $z$ தளத்திலுள்ள உருவத்தையே $w$ தளத்தில் வேறு ஆதியை (origin) கொண்டு வரைந்ததாகும். இதை இடப்பெயர்ச்சி (transformation) என்போம். $w=u+iv$; $z=x+iy$; $a=\alpha+i\beta$ எனின் $u=x+\alpha$, $v=y+\beta$ என்ருகும்.

(2) $w=pz$ (மெய்யெண்) $z$ தளத்திலுள்ள $p$ உருவமும் $w$ தளத்திலுள்ள உருவமும் வடிவொத்தும், ஒரே மாதிரி வைக்கப் பட்டதுமாகவும் (similar and similarly placed) இருக்கும். ஆனல் wவிலுள்ள உருவம் $z$விலுள்ள உருவத்தைப்போல் $p$ மடங்காகும். இதை உருப்பெருக்கமென்போம்.

(3) $w=z\,e^{i\theta}$ எனின் $|w|=|z|$. wன் கோண வீச்சம் $=\theta+z$ன் கோண வீச்சம். எனவே zவிலுள்ள உருவத்தை ஆதியை பொருத்து $\theta$ கோணம் சுற்றி $w$ தளத்தில் அமைக்கவும். இதை சுழற்சி மாற்றமென்போம்.

(4) $w=\dfrac{1}{z}$. $z=\gamma\,e^{i\theta}$ எனின் $|w|=\dfrac{1}{\gamma}$. $w$ ன் கோண வீச்சம் $=-\theta$ ஆகும்.

தன் மாற்ற ஆரையை 1 எனக்கொண்டு $z$ லிலுள்ள உருவத்தை ஆதியை பொருத்து தன் மாற்றம் செய்து மெய் அச்சின்மேல் பிரதி பிம்பம் காணவும். இதனுல் உருவம் மாறும்.

மேற்சொன்ன $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ $[\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0]$ என்ற மாற்றத்தை சற்று ஆராய்வோம்.

$$w=\frac{\alpha}{\gamma}\left[\frac{z+\beta/\alpha}{z+\delta/\gamma}\right]$$

$$= \frac{\alpha}{\gamma}\left[1+\frac{\beta/\alpha-\delta/\gamma}{z+\delta/\gamma}\right]$$

$$= \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\,\gamma-\alpha\,\delta}{\gamma^2}\cdot\frac{1}{\gamma+\delta/\gamma}$$

$$\therefore\ w=\frac{\alpha}{\gamma}+w_1\ ;\quad w_1=\frac{\beta\,\gamma-\alpha\,\delta}{\gamma^2}\cdot w_2\ ;\quad w_2=\frac{1}{w_3}$$

$w_3=z+\delta/\gamma$ என்ற மாற்றங்களினுல் அமைவதை நோக்குக.

$w=w_1+\frac{\alpha}{\gamma}$ ; $w_3=z+\delta/\gamma$ என்பவை இடப்பெயர்ச்சி மாற்றங்கள்.

$w_1=\frac{\beta\,\gamma-\alpha\,\delta}{\gamma^2}w_2$ என்பது உருப்பெருக்கம். $w_2=\frac{1}{w_3}$ என்பது தன் மாற்றம், பிரதிபிம்பம் சேர்ந்த மாற்றமாகும். [ஆகவே இம்மாற்றம் வளைகோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணங்களை மாற்றுது. ஆனுல் திரும்பும் திசை மாறும்.] எனவே இம்மாற்றம் ஒரு இணங்கு சார்பை மாற்றமாகாது. மேலும் இடப்பெயர்ச்சி, உருப்பெருக்கம், பிரதி பிம்பம் என்ற மாற்றங்களைத் தவிர, தன் மாற்றமும் இருப்பதால், மேற் கண்ட மாற்றத்தினுல், வட்டங்கள் வட்டங்களாகவோ, நேர்கோடு களாகவோ (கந்தழி ஆரையுள்ள வட்டங்கள்) மாறும். இதை இப்போது விரிவாக ஆராய்வோம்.

### 3·3·1. வரை கணித தன் மாற்றம் (Geometrical Inversion)

$O$ என்ற புள்ளியை மையமாகவும் '$r$' ஆரையுமாகக்கொண்ட $S$ என்ற வட்டத்தை எடுத்துக் கொள்க. $P$, $Q$ என்ற புள்ளிகள் $O\,P\,Q$ என்ற நேர்கோட்டிலமையட்டும்.

$O\,P$, $O\,Q=r^2$ என்ருல், $S$ வட்டத்திற்கு, $P$, $Q$ என்பவை தன் மாற்ற புள்ளிகளாகும் (inverse points).

$z$, $z'$, $o$ என்ற சிக்கலெண்கள் $P$, $Q$, $O$ என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கட்டும். அப்போது,

$|z-o|\ |z'-o|=r^2.$

மேலும், $(z-o)$ன் கோண வீச்சம் $=(z'-o)$ கோண வீச்சம்.

இதை $(z'-o)\ (\bar{z}-\bar{o})=r^2$—I எனக் கூறலாம்.

$S$ என்ற வட்டத்தின் சமன்பாட்டை

$A\,\bar{z}\,z+B\,z+\bar{z}\,\bar{B}+C=0$ எனக்கொள்க.

இதையே,

$$\left(z+\frac{\bar{B}}{A}\right)\left(\bar{z}+\frac{B}{A}\right)=\frac{B\,\bar{B}-A\,C}{A^2}\ \text{என ஆகும்.}$$

[குறிப்பு: $\left(z+\frac{\bar{K}}{\lambda}\right)\left(\bar{z}+\frac{K}{\lambda}\right) = R^2$ என்றால் வட்டத்தின் மையம் $-\frac{\bar{K}}{\lambda}$ ஆகும். ஆரை $R$ ஆகும்.]

$I$ என்பதை $\left(z' + \frac{\bar{B}}{A}\right)\left(\bar{z} + \frac{B}{A}\right) = \frac{B\bar{B} - AC}{A^2}$

எனக்கொண்டால்,

$$A\bar{z}z' + Bz' + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \qquad -II$$

அல்லது,

$$z' = -\frac{\bar{B}\bar{z} - C}{A\bar{z} + B}$$ என்றாகும்.

இப்போது $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ என்ற மோபீஸ் மாற்றத்தைக் கவனிக்க $[\alpha\delta \mp \beta\gamma]$ அதாவது $z = \frac{-\delta w + \beta}{\gamma w - \alpha}$ என்றாகும்.

எனவே,

$$z^1 = \frac{-\delta w^1 + \beta}{\gamma w^1 + \alpha}$$

$$\bar{z} = \frac{-\delta \bar{w} + \beta}{\gamma \bar{w} + \alpha}$$ என்பதால்

$II$ என்பது

$$A\left[\frac{-\delta\bar{w} + \beta}{\gamma\bar{w} + \alpha}\right]\left[\frac{-\delta w' + \beta}{\gamma w' + \alpha}\right] + B\left[\frac{-\delta w' + \beta}{\gamma w' + \beta}\right]$$

$$+ \bar{B}\left[\frac{-\delta\bar{w} + \beta}{\gamma\bar{w} + \alpha}\right] + C = 0$$ என்றாகும்.

$$A[\delta^2\bar{w}w' - \beta\delta\bar{w} - \beta\delta w' + \beta^2]$$
$$+ B[-\gamma\delta\bar{w}w' + \beta\gamma\bar{w} - \alpha\delta w' + \alpha\beta]$$
$$+ \bar{B}[-\gamma\delta\bar{w}w' - \beta\delta\bar{w} + \beta\gamma w' + \alpha\beta]$$
$$+ C[\gamma\bar{w}w' + \alpha\gamma\bar{w} + \alpha\gamma w' + \alpha^2] = 0$$
$$\bar{w}w'[A\delta^2 - B\gamma\delta - \bar{B}\gamma\delta + c\gamma]$$
$$+ w'[-A\beta\delta - B\alpha\delta + \bar{B}\beta\gamma + c\alpha\gamma]$$
$$+ \bar{w}[-A\beta\delta + B\beta\gamma - \bar{B}\beta\delta + c\alpha\gamma]$$
$$+ [A\beta^2 + B\alpha\beta + \bar{B}\alpha\beta + c\alpha^2] = 0$$

$\therefore$ இது $Dw'\bar{w} + Ew' + \bar{E}\bar{w} + F = 0$ என்ற உருவிலுள்ளது.

$\therefore$ $w, w'$ என்பவை

$D w \bar{w} + E w + \bar{E}\ \bar{w} + F = 0$ என்ற வட்டத்தின் தன் மாற்றப் புள்ளிகளாகும். ஆகவே ஒரு வட்டத்தைப் பொருத்த தன் மாற்றப் புள்ளிகள் இரண்டும் மோபீஸ் மாற்றத்தினுல், மாற்றப்பட்ட வட்டத்தின் தன் மாற்றப் புள்ளிகளாக மாறும்.

குறிப்பு: $A\ \bar{z}\ z' + B z' + \bar{B}\ \bar{z} + C = 0$

என்பதை $z' = \dfrac{-\bar{B}\bar{z} - C}{A\bar{z} + B}$ எனலாம்

இதையே $w = \bar{z}$ என்றும்

$$z' = \frac{-\bar{B} w - C}{A w + B} \text{ என்றும்}$$

இரு மாற்றங்களாகக் கருதலாம்.

$w = \bar{z}$ என்ற மாற்றம் மெய் அச்சில் எதிருருவம் (reflexion) ஆகும். $z' = \dfrac{-\bar{B} w - C}{A w + B}$ என்பது ஒரு மோபீஸ் மாற்றமாகும். முதல் மாற்றம் கோணங்களின் அளவைகளை மாற்றுது. ஆனுல் திரும்பும் திசை மாறும். இரண்டாவது மாற்றம் ஒரு இணங்கு சார்பை மாற்றமாகும். எனவே தன் மாற்றம் இணங்கு சார்பை மாற்றமன்று.

## 3·3·2 இணங்கு சார்பை முறிவுப் புள்ளிகள் (Critical points):

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - I$$

$\gamma \neq 0$ என்ருல், $z = \infty$ என்பதற்குப் பொருந்தும் புள்ளி $w = \dfrac{\alpha}{\gamma}$ ஆகும். அதேபோல், $z = -\dfrac{\delta}{\gamma}$ என்பதற்குப் பொருந்தும் புள்ளி $w = \infty$ ஆகும்.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2} \text{ என்பதால்,}$$

மேற்கண்ட $I$ என்ற மாற்றத்தின் முறிவுப் புள்ளிகள் $z = \infty$, $z = -\delta/\gamma$ என்பவையாகும்.

இப்போது பொதுவச்சு வட்டங்களைப் பொருத்து இம் மாற்றத்தின் போக்கை கவனிப்போம்.

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k \text{ I என்ற சமன்பாடு}$$

$A, B$ என்ற புள்ளிகளை எல்லைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட பொது வச்சு வட்டங்களை குறிக்கும்

$$w = \frac{\alpha \gamma+\beta}{\gamma z+\delta} \; (\alpha \, \delta-\beta \, \neq 0)$$

என்பதை $z = \dfrac{-\delta \, w+\beta}{\gamma \, w-\alpha}$ என்று மாற்றலாம்.

அப்போது $I$ என்ற சமன்பாடு

$$\left| \frac{\dfrac{-\delta \, w+\beta}{\gamma \, w-\alpha} - a}{\dfrac{-\delta \, w+\beta}{\gamma \, w-\alpha} - b} \right| = k$$

அல்லது,

$$\left| \frac{-\delta \, w+\beta-a \, (\gamma \, w-\alpha)}{-\delta \, w+\beta-b \, (\gamma \, w-\alpha)} \right| = k$$

$$\therefore \quad \left| \frac{-w \, (\delta+a \, \gamma)+a \, \alpha+\beta}{-w \, (\delta+\beta \, \gamma)+b \, \alpha+\beta} \right| = k$$

$$\therefore \quad \left| \frac{\delta+a \, \gamma}{\delta+b \, \gamma} \right| \; \left| \frac{w-(a \, \alpha+\beta)}{w-(b \, \alpha+\beta)} \right| = k$$

$\therefore$ இதை $\left| \dfrac{w-\lambda}{w-\mu} \right| = k'$ என்று எழுதலாம். இங்கு $\lambda = a \, \alpha+\beta$

$\mu = b \, \alpha+\beta$, $k' = k \left| \dfrac{\delta+b \, \gamma}{\delta+a \, \gamma} \right|$ என்பதை நோக்குக.

## 3·3·3. குறுக்குத் தகவின் மாற்றமின்மை (Invariance of Cross-Ratio)

$z$ தளத்தில் $z_1, z_2, z_3, z_4$ என்ற நான்கு புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்க. அதன் குறுக்குத் தகவை

$$\frac{(z_1-z_4) \; (z_3-z_2)}{(z_1-z_2) \; (z_3-z_4)}$$ என்று குறிப்பிடலாம்.

$W = \dfrac{\alpha \, z+\beta}{\gamma \, z+\delta}$ என்ற மோபீஸ் மாற்றத்தால்

$$w_1 - w_4 = \frac{\alpha \, z_1+\beta}{\gamma \, z_1+\delta} - \frac{\alpha \, z_4+\beta}{\gamma \, z_4+\delta} = \frac{\alpha \, \delta \, (z_1-z_4)+\beta \, \gamma \, (z_4-z_1)}{(\gamma \, z_1+\delta) \; (\gamma \, z_4+\delta)}$$

$$= \frac{(\alpha \, \delta-\beta \, \gamma) \; (z_1-z_4)}{(\gamma \, z_1+\delta) \; (\gamma \, z_4+\delta)}$$ என்றாகும்.

$$\therefore \frac{(w_1-w_4)\ (w_3-w_2)}{(w_1-w_2)\ (w_3-w_4)} = \frac{\dfrac{(\alpha\delta-\beta\gamma)}{(\gamma z_1+\delta)(\gamma z_4+\delta)}(z_1-z_4) \times \dfrac{(\alpha\delta-\beta\gamma)\ (z_3-z_2)}{(\gamma z_3+\delta)\ (\gamma z_2+\delta)}}{\dfrac{(\alpha\delta-\beta\gamma)}{(\gamma z_1+\delta)\ (\gamma z_2+\delta)}(z_1-z_2)\times\dfrac{(\alpha\delta-\beta\gamma)\ (z_3-z_4)}{(\gamma z_3+\delta)\ (\gamma z_4+\delta)}}$$

$$= \frac{(z_1-z_4)\ (z_3-z_2)}{(z_1-z_2)\ (z_3-z_4)}$$

∴ மோபீஸ் மாற்றத்தால், $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ என்ற புள்ளிகளின் மாற்றுப் புள்ளிகளான $w_1$, $w_2$, $w_3$, $w_4$ என்பவைகளின் குறுக்குத் தகவு மாருமலிருக்கிறது.

**குறிப்பு 1 :**

$z_2=\infty$, $w_1=\infty$ என்று கொண்டால் $\dfrac{(z_1-z_4)\ (z_3-z_2)}{(z_1-z_2)\ (z_3-z_4)}$ என்பது $\dfrac{z_1-z_4}{z_3-z_4}$ என்று மாறும்.

அதேபோல் $\dfrac{(w_1-w_4)\ (w_3-w_2)}{(w_1-w_2)\ (w_3-w_4)}$ என்பது $\dfrac{w_3-w_2}{w_3-w_4}$ என்று மாறும்.

$$\therefore \frac{w_3-w_2}{w_3-w_4} = \frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}$$ என்ருகும்.

**குறிப்பு 2 :**

$z_2$, $z_3$, $z_4$ என்ற மூன்று மெய்யிலா எண்களுக்கு மாருத மதிப்புகளை இடுக. அப்போது மோபீஸ் மாற்றத்தால் கிடைக்கும் $w_1$, $w_2$, $w_3$ என்ற எண்களுக்கும் மாருத மதிப்புகளே கிடைக்கும்.

$$\therefore \frac{(w-w_4)\ (w_3-w_2)}{(w-w_2)\ (w_3-w_4)} = \frac{(z-z_4)\ (z_3-z_2)}{(z-z_2)\ (z_3-z_4)}$$

என்ற மாற்றம் அமையும். (A)

$$\frac{K\,(w-w_4)}{l\,(w-w_2)} = \frac{\lambda\,(z-z_4)}{\mu\,(z-z_2)}$$

[$K=w_3-w_2$ ; $l=w_3-w_4$ ; $\lambda=z_3-z_2$ ; $\mu=z_3-z_4$ என்க.]

$$K\mu\,[w\,z-w\,z_2-w_4\,z+w_4\,z_2]$$
$$=l\,\lambda\,[w\,z-w_2\,z-w\,z_4+w_2\,z_4]$$

$$\therefore w\,[K\mu\,(z-z_2)-l\,\lambda\,(z-z_4)]$$
$$=l\,\lambda\,[-w_2\,z+w_2\,z_4]-K\mu\,[-w_4\,z+w_4\,z_2]$$

$$\therefore\ w=\frac{z\,(K\mu\,w_4-l\,\lambda\,w_2)+(l\,\lambda\,w_2\,z_4-K\,\mu\,w_4\,z_2)}{z\,(K\mu-l\,\lambda)+(l\,\lambda\,z_4-K\,\mu\,z_2)}$$

$$=\frac{a\,z+b}{c\,z+d}$$

இந்த மாற்றத்தின் குறுக்குத் தகவு

$$\begin{aligned}
&=a\,d-b\,c\\
&=(K\,\mu\,w_4-l\,\lambda\,w_2)\,(l\,\lambda\,z_4-K\,\mu\,z_2)\\
&\qquad-(l\,\lambda\,w_2\,z_4-K\,\mu\,w_4\,z_2)\,(K\,\mu-l\,\lambda)\\
&=K\,l\,\lambda\,\mu\,w_4\,z_4-K^2\,z_2-l^2\,z_4\\
&\qquad+K\,l\,\lambda\,\mu\,z_2\,w_2-K\,l\,\lambda\,\mu\,w_2\,z_4\\
&\qquad+l^2\,z_4+K^2\,z_2-K\,l\,\lambda\,\mu\,w_4\,z_2\\
&=K\,l\,\lambda\,\mu\,[w_4\,z_4+w_2\,z_2-w_2\,z_4-w_4\,z_2]\\
&=K\,l\,\lambda\,\mu\,(w_2-w_4)\,(z_2-z_4)\\
&=(w_2-w_4)\,(w_3-w_2)\,(w_3-w_4)\,(z_2-z_4)\,(z_3-z_2)\,(z_3-z_4)\\
&\neq 0
\end{aligned}$$

(A) என்ற மாற்றம் ஒரு மோபீஸ் மாற்றமாகும்.

### 3·3·4. முக்கிய மோபீஸ் மாற்றங்கள்

(1) $I(z)\geq 0$ என்ற பாதி $z$-தளத்தை $|w|<1$ என்ற '1' ஆரையுள்ள வட்டமாக மாற்ற :

$z=x+i\,y$, $\bar{z}=x-i\,y$ என்ற புள்ளிகள், மெய்யச்சை பொருத்து பிரதிபிம்பங்களாகும். அதேபோல் $w$, $1/w$ என்பவை $|w|=1$ என்ற வட்டத்தைப் பொருத்து தன்மாற்றப் புள்ளிகளாகும். $w$-தளத்தில் $w=0$ ; $w=\infty$ என்பவை தன்மாற்றப் புள்ளிகளாகும்.

$w=\dfrac{\alpha\,z+\beta}{\gamma\,z+\delta}$ என்பதில் $\gamma\neq 0$ என்று கொள்வோம்.

$w=0$ எனின் $z=-\beta/\alpha$

$w=\infty$ எனின் $z=-\delta/\gamma$

$\therefore\ -\dfrac{\beta}{\alpha}=a$ என்னும், $-\delta/\gamma=\bar{a}$ என்று எடுத்துக்கொண்டு

$w=\dfrac{\alpha}{\gamma}\left(\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}\right)$ என்று மாற்றத்தை எழுதுவோம். $z=0$ எனின்

$w=\dfrac{a\,\alpha}{\bar{a}\,\gamma}$ ஆகும்.

இந்தப் புள்ளி $|w| = 1$ என்ற வட்டத்தில் அமைய வேண்டும்.

$$\therefore \left|\frac{a}{\bar{a}}\frac{\alpha}{\gamma}\right| = 1 \quad \therefore |\alpha/\gamma| = 1$$

$\therefore \alpha = \gamma e^{i\theta}$ என்றிருக்கவேண்டும்.

$\therefore w = \dfrac{z-a}{z-\bar{a}} e^{i\theta}$ என்று மாற்றத்தைக் கொள்ளலாம். $z=a$ எனின் $w=0$ என்பதால் $z=a$ என்ற புள்ளி $z$ தளத்தின் மேற்பாகத்தில் இருக்கவேண்டும். அதாவது $I(a) > 0$.

(2) $z$ தளத்தில் $|z| \leq 1$ என்ற 1 ஆரை வட்டத்தை $w$ தளத்தில் $|w| \leq 1$ என்ற '1' ஆரை வட்டமாக மாற்ற

$$w = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \text{ என்பதில்}$$

$z=a$, $z=1/\bar{a}$ ($|a| < 1$) என்ற புள்ளிகள் $w=0$, $w=\infty$ என்ற புள்ளிகளுக்கு பொருந்துவதாக இருக்கவேண்டும். $\therefore a = -\beta/\alpha$ $\dfrac{1}{\bar{a}} = -\delta/\gamma$ என்று கொள்க.

$$\because w = \alpha/\gamma \left(\frac{z-a}{z-1/\bar{a}}\right)$$

$$= \frac{\bar{a}\alpha(z-a)}{\gamma(\bar{a}z-1)}$$

$z=1$ என்ற புள்ளி $|w| = 1$ என்ற வட்டத்திலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியுடன் பொருத்தவேண்டும்.

$$\therefore \left|\frac{\bar{a}\alpha}{\gamma}\left(\frac{1-a}{\bar{a}-1}\right)\right| = 1$$

$$\therefore \left|\frac{\bar{a}\alpha}{\gamma}\right| = 1 \left(\because \left|\frac{1-a}{\bar{a}-1}\right| = 1\right)$$

$\therefore \bar{a}\alpha = \gamma e^{i\theta}$ என்று கொள்வோம்.

$\therefore w = \left(\dfrac{z-a}{\bar{a}z-1}\right) e^{i\theta}$ என்று மாற்றத்தை எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பாக $z = e^{i\lambda}$ ($\because |z| = 1; a = b e^{i\mu}$) எனின்

$$|w| = \left|\frac{e^{i\lambda} - b e^{i\mu}}{b e^{i(\lambda-\mu)} - 1}\right|$$

$$= \left|\frac{1 - b e^{-i(\lambda-\mu)}}{b e^{i(\lambda-\mu)} - 1}\right| = 1$$

மேலும் $z=\gamma\, e^{i\lambda}$ ($\gamma<1$ எனின்

$$|z-a|^2-|\bar{a}z-1|^2=(\gamma^2-2\gamma b\cos(\lambda-\mu)$$
$$+b^2)-(b^2\gamma^2-2\gamma b\cos(\lambda-\mu)+1)$$
$$=\gamma^2(1-b^2)+(b^2-1)$$
$$-(\gamma^2-1)(1-b^2)<0\ (\because \gamma<1\ |a|=b<1$$
$$\therefore \frac{|z-a|^2}{|\bar{a}z-1|^2}<1$$

$\therefore |w|<1 \ \therefore$ வட்டங்களின் உட்பகுதியிலுள்ள புள்ளிகள் பொருந்துகின்றன.

(3) $z$ தளத்தில் மூன்று வட்ட வில்களால் அடைபட்டுக் கிடக்கும் பகுதியை $w$ தளத்தில் ஒரு முக்கோணமாக மாற்ற:

$w=\lambda\dfrac{z-a}{z-b}$ என்ற மாற்றத்தில் $A$ $(z=b)$ என்ற புள்ளி $w=\infty$ என்றும் $B$ $(z=a)$ என்ற புள்ளி $w=0$ என்றும் மாறும். மேற்கண்ட மாற்றத்தை $w-\lambda=\dfrac{\lambda(b-a)}{z-b}$ என்று எழுதலாம். மேலும் $z^1=z-b$; $\lambda^1=\lambda(b-a)$;

$w^1=w-\lambda$ என்றால் $w^1=\dfrac{\lambda^1}{z^1}$ என்று மாறும். $z^1=z-b$, $w^1=w-\lambda$ என்ற மாற்றங்கள் இடப் பெயர்ச்சிகளேயாகும்.

$\therefore w^1=\dfrac{\lambda^1}{z^1}$ என்பது தன் மாற்றம் (inversion) உருப் பெருக்கம் (magnification) ஆகும்.

$A$ $(z=b)$ என்ற புள்ளியின் வழியாக மூன்று வட்டங்களும் செல்வதாகக் கொண்டால், $z=a$க்கு $w=\infty$ என்பது மாற்றமென்பதால், மூன்று வட்டப்பகுதிகளும் $w$ தளத்தில் மூன்று நேர்கோடுகளாகும்.

$B$ $(z=a)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் இரு வட்டப் பகுதிகள் $w=0$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் இரு நேர் கோட்டிற்கு பொருந்தும்.

(4) $w=\dfrac{(1+z^3)^2-i(1-z^3)^2}{(1+z^3)^2+i(1-z^3)^2}$ என்ற மாற்றத்தைக் கொண்டு $|z|<1$ '0'$<z$-ன் வீச்சம் $<\pi/3$ என்ற வட்டக் கோணப் பகுதியின் மாற்றத்தை நோக்குக. $z=r\,e^{i}\theta$; $z^3=a$, $a=R\,e^{\,i}\phi$ எனின் $R\,e^{\,i}\phi=r^3\,e^{i3}\theta$

$$\therefore R=r^3$$
$$\phi=3\theta$$

எனவே $r$ என்பது 0 லிருந்து 1 வரையும் $z$ன் வீச்சம் $\theta$, 0 லிருந்து $\pi/3$ வரை மாறும்போது $R$ என்பது 0 லிருந்து 1 வரையும் $a$ன் வீச்சம் $\phi$, 0 லிருந்து $\pi$ வரையும் மாறும். $\therefore$ $|z| < 1$ $0<\theta<\pi/3$ என்ற வட்டக் கோணப்பகுதி, தளத்தின் மேல் பகுதியில் அரை வட்டமாக மாறும். மேலும்

$$w=\frac{(1+a)^2-i\,(1-a)^2}{(1+a)^2+i\,(1-a)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2-i}{\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2+i} \quad =\frac{b^2-i}{b^2+i}$$

$$\therefore\ b=\frac{1+a}{1-a}$$

$$\therefore\ a=\frac{b-1}{b+1}$$ என்றாகும்.

$$\therefore\ \left|\frac{b-1}{b-1}\right| = |a| = R < 1$$

$$\therefore\ |b-1| < |b+1|$$

$$\therefore\ R(b) > 0$$

$b=x'+iy'$ எனின்

$$a=\frac{(x'-1)+iy'}{(x'+1)+iy'}$$

$$=\frac{\{(x'-1)+iy'\}\{(x'+1)-iy'\}}{(x'+1)^2+y'^2}$$

$$\therefore\ I(a)=\frac{2y'}{(x'+1)^2+y'^2}$$

$I\,(a) > 0$ என்று அறிவோம்

$$\therefore\ y' = I\,(b) > 0.$$

$$\therefore\ w=\frac{b^2-i}{b^2+i} = \frac{c-i}{c+i}$$

$c=b^2$ $\quad c=R'e^{i\phi'}$

$b=R''e^{i\phi''}$ எனின்

$$R'=R''^2$$

$\phi'=2\phi''$ என்றாகும்.

$0<R''<\infty$ ; $\quad 0<\phi''<\pi/2$ என்றால்

$0<R'<\infty$ ; $\quad 0<\phi'<\pi$

∴ $c$ என்பது $c$— மெய் அச்சுக்கு மேலுள்ள அரைத்தளத்தை வரையும்.

$|c-1| < |c+1|$ என்பதால்

$|w| <|$

(5) $w = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ என்ற மாற்றத்தை விரிவாக நோக்குவோம்.

$z=0$ எனின் $w = \infty$ ஆகும்

மேலும் $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{z^2}\right]$

என்பதால் $z=\pm 1$ என்பவை மேற்கண்ட மாற்றத்தின் முறிவுப் புள்ளிகளாகும்.

$w=u+iv$

$z=\pi e^{i\theta}$ என்று கொண்டால்

$$u+iv=\frac{1}{2}\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{r}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\theta\ (r+1/r)+i\ \sin\theta\ (r-1/r)\right]$$

$$\therefore\ u=\frac{1}{2}\cos\theta\ (r+1/r)$$

$$v=\frac{1}{2}\sin\theta\ (r-1/r)$$

அல்லது $\cos\theta=\frac{u}{2(r+1/r)}$

$$\sin\theta=\frac{v}{2(r-1/r)}$$

$r$ ஒரு மாறிலி எனக்கொண்டால் அதாவது $|z| = r = k$ எனின் $|z| = k$ ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \frac{u^2}{\frac{1}{4}(r+1/r)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}(r-1/r)^2}=1$$

அதாவது $w$ தளத்தில் இது $(r+1/r)$, $(r-1/r)$ என்பவைகளை முறையே நெட்டச்சாகவும், குற்றச்சாகவும் கொண்ட நீள் வட்டமாகும்.

$r \to 1$ எனின் $\frac{1}{r} \to 1$ எனவே நெட்டச்சு '2'ம், குற்றச்சு '0'ம் ஆகும். அதாவது $|z| = 1$ என்ற "1" ஆரையுள்ள வட்டம் $w$ தளத்தின் மெய்யச்சில் $u=-1$ ; $v=+1$ ஆக மாறும்.

(6) இப்போது $w=z^n$ என்ற மாற்றத்தை நோக்குவோம்.

$$w=u+iv = pe^{i\phi}$$

$$z=x+iy = re^{i\theta}$$ என்பதால்

$$p=r^n ;\ \phi = n\theta$$ என்ருகும்.

மேலும் $u+iv = r^n (\cos n\ \theta + i \sin n\ \theta)$

$$u=r^n \cos \theta ;\ v = r^n \sin n\theta$$

$$u^2+v^2=r^{2n}=(x^2+y^2)^n$$

$$\frac{v}{u}= \tan n\ \theta.$$

$x^2+y^2=c^2$ அல்லது $r=c$ என்ற $z$ தளத்தின் வட்டங்கள் $u^2+v^2=c^{2n}$ அல்லது $p=c^n$ என்ற வட்டங்களாக $w$ தளத்தில் மாறும். குறிப்பாக $r=|z|=1$ என்ற வட்டங்கள் $p=1$ என்ற வட்டங்களாகவே மாறுவதை நோக்குக.

$\theta=$ மாறிலி என்பது $z$-தளத்தில், ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டை குறிக்கும். $\phi=n\theta=$ மாறிலி என்பதால், $w$ தளத்தில் அந்த தளத்தின் ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடாக மாறும். $z=0$ என்பது இந்த மாற்றத்தின் முறிவுப் புள்ளியாவதால். இம்மாற்றம் இணங்கு சார்பை மாற்றமல்ல.

$n=2$ என்று மதிப்பிட்டு $w=z^2$ என்ற மாற்றத்தைக்கவனிப்போம். $z=z_0$ என்ற புள்ளிக்கு $w_0=z_0^2$ என்ற ஒரே புள்ளியே உள்ளது. ஆனல் $w=w_0$ என்ற புள்ளிக்கு $z=|\sqrt{w_0}|$; $z=-|\sqrt{w_0}|$ என்ற இரு புள்ளிகள் உள்ளன.

எனவே இது ஒன்றுக்கொன்ருன மாற்றமல்ல, ஆனல் $z$ தளத்தின் மேல் பகுதியை எடுத்துக்கொண்டால், அம்மேல் பகுதியிலுள்ள புள்ளிகளுக்கும், $w$ தளத்திலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் ஒன்றுக்கொன்ருன மாற்றம் அமைகிறது.

மேலும் $w=u+iv=(x+iy)^2$

$=x^2-y^2+2ixy$ என்பதால்

$u=(x^2-y^2)$; $v=2xy$ என்ருகும். $u$ மாறிலி என்ருல், $x^2-y^2=$ மாறிலி என்பது செவ்வக அதிபரவளைவு குடும்பத்தைக் குறிக்கும். அதேபோல் $v$ மாறிலியென்ருல், $2\ xy=$ மாறிலி என்பது வேறு ஒரு மேற்சொன்ன அதிபரவளைவு குடும்பத்துக்கு செங்குத்தான செவ்வக அதிபரவளைவு குடும்பத்தைக் குறிக்கும்.

மேலும் $2xy=v_1$, $2xy=v_2$ என்பது $z$ தளத்தில் இரு செவ்வக அதிபரவளைவுக் கிடையேயுள்ள பகுதியைக் குறிக்கும். $v=v_1$, $v=v_2$

என்பது $w$ தளத்தில் $x$ அச்சுக்கு இணையாக வரையப்படும் இரு நேர்கோட்டுக்களுக்கிடையேயுள்ள பகுதியைக் குறிக்கும்.

மேலும் $|z-a|=c$ [$a, c$ என்பவை மெய் எண்கள்] என்ற வட்டங்களை நோக்குக.

$$\therefore\ z-a=c\,e^{i\theta}$$

$$z=a+c\,e^{i\theta}$$

$$z^2=(a+c\,e^{i\theta})^2$$

$$=(a+c\cos\theta+ic\sin\theta)^2$$

$$w=a^2+c^2\cos^2\theta-c^2\sin^2\theta+2\,ac\cos\theta+2iac\sin\theta+2\,ic^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore w-a^2+c^2=c^2+c^2\cos^2\theta-c^2\sin^2\theta$$

$$+\ 2ac\,(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$+\ 2ic^2\sin\theta\cos\theta.$$

$$=2c^2\cos^2\theta+2ic^2\sin\theta\cos\theta+2\,ace^{i\theta}$$

$$=2c^2\cos\theta e^{i\theta}+2\ ace^{i\theta}$$

$$=2c\ [c\cos\theta+a]\ e^{i\theta}$$

$=R\,e^{i\theta}$ என்க.

$\therefore w=a^2-c^2+R\,e^{i\theta}$ என்றுகும். $w$ தளத்தில் $w=a^2-c^2$ என்று ஆதியைக் கொண்டு $R=2ac+2c^2\cos\theta$ என்ற லிமக்கான் (Limacon) ஆக மாறுவதை நோக்குக. $a=1$ எனின்

$R=2c\ \ (1+c\cos\theta)$ என்றுகும். இது ஒரு நெஞ்சுவளை (cardiod) யைக் குறிக்கும்.

(7) $w=\sqrt{z}$ என்ற மாற்றத்தைத் நோக்குக.

$\therefore u^2-v^2=x$ $\qquad w=u+iv$

$2uv=y$ $\qquad z=x+iy$ என்க.

$\therefore$ $v$ஐ நீக்கி $y^2=4u^2\ (u^2-x)$

அதேபோல் $u$ஐ நீக்கி $y^2=4v^2\ (v^2+x)$ $u=$ மாறிலி குறிக்கும் நேர் கோடுகள் $z$ தளத்தில், ஆதியை குவியமாகக் கொண்ட பரவளைவு களாக இருக்கும். $v=$ மாறிலி குறிக்கும் செங்குத்து நேர்கோடுகள். $(-v^2, o)$ என்ற புள்ளியை உச்சியாகக் கொண்ட பொதுக் குவிய பரவளையாக இருக்கும். இந்த இருபரவளைவு தொகுதிகளும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாக இல்லை என்பது நோக்கத்தக்கது.

(8) $w = \tan^2 (\pi/4 \sqrt{z})$ என்ற மாற்றத்தைக் கவனிக்கவும்.

$$w = \tan^2 \frac{w_1}{2}$$

$$w_1 = \pi/2\ w_2\ ;\ w_2 = \sqrt{z}$$

என்ற மூன்று மாற்றங்களின் சேர்க்கையே மேற்சொன்ன மாற்றமாகும்.

$$w = u + iv$$
$$w_1 = u_1 + iv_1$$
$$w_2 = u_2 + iv_2$$
$z = x + iy$ என்பதால்

முதல் மாற்றம் $u + iv = \tan^2 \frac{w_1}{2}$

$$= \frac{1 - \cos w_1}{1 + \cos w_1}$$

$u_1 = 0,\ u_1 = \pi/2$ என்ற இரு நேர்கோடுகளை நோக்குக.

$w_1 = \pi/2 + iv$ எனக் கொண்டால் $\cos w = i \sin h\ v$

$$w = \frac{1 - i \sin h\ v}{1 + i \sin h\ v} = \frac{(1 - i \sin h\ v)^2}{1 + \sin h^2\ v}$$

$$w = \frac{1 - \sin h^2\ v - 2i \sin h\ v}{\cos h^2\ v}$$

$$\therefore\ |\ w\ | = \frac{1}{\cos h^2\ v} \sqrt{(1 - \sin h^2\ v)^2 + 4 \sin h^2\ v} = \sqrt{\frac{(1 + \sin h^2\ v)^2}{\cos h^2\ v}}$$

$$|\ w\ | = 1$$

$\therefore w_1$ தளத்தில், $w_1 = \pi/2$ என்ற நேர்கோட்டில் $v = -\infty$ யிலிருந்து $+\infty$க்கு நகரும்போது, $w$ தளத்தில், $w_1$'' ஆரையுள்ள வட்டத்தை நிர்ணயிக்கும். அதேபோல் $w_1 = iv$ என்று கொண்டால்

$$\cos w_1 = \cos i\ v$$
$$= \cos h\ v$$

$$\therefore\ w = \frac{1 - \cos h\ v}{1 + \cos h\ v}$$

= மெய்யெண்ணாகும்.

$v = +\infty$யிலிருந்து "0"க்கு நகரும்போது $w$, $-1$ லிருந்து 0க்கும், $v$, $o$லிருந்து $-\infty$க்கு மாறும்போது, $w$, 0லிருந்து $-1$க்கு மறுபடியும்

நகரும். ஆனால் $u_1=0$, $u_2=\pi/2$ என்ற கோடுகளுக்கிடையே உள்ள பகுதி $|w|=1$ என்ற வட்டத்தின் உட்பகுதியாக மாறும்.

$w_1 = \frac{\pi}{2} w_2$ என்பதால்

$w_1$-தளத்தில் $u_1=0$, $u_1=\pi/2$ என்ற நேர்கோடுகளுக்கிடையே யுள்ள பகுதி $w_2$ தளத்தில் $u_2=0$, $u_2=1$ என்ற நேர்கோடுகளுக் கிடையேயுள்ள பகுதியாக மாறும்.

$w_2=\sqrt{z}$ $w_2$ தளத்தில் $u_2=0$, $u_1=1$ என்ற நேர்கோடுகளுக் கிடையேயுள்ள பகுதி $y^2=4(1-x)$ என்ற பரவளைவுக்குள்ளே யுள்ள பகுதியாக மாறும். எனவே $w=\tan^2(\pi/_4\sqrt{z})$ என்ற மாற்றத்தின் மூலம் $y^2=4(1-x)$ என்ற பரவளைவின் உட்பகுதி $|w|=1$ என்ற விட்டமாக மாறுவதுடன் ஒன்றுக்கொன்றுன மாற்றமாகவும் அமைகிறது.

$$\frac{dw}{dz} = \tan \pi/_4\sqrt{z}\ \sec^2 \pi/_2\sqrt{z} \times \frac{\pi}{4\times\sqrt{z}}$$

$$= \frac{\sin \pi/_4\sqrt{z}}{\pi/_4\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{\cos^3 \frac{\pi}{4}\sqrt{z}} \times \frac{\pi}{16}$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{16} \qquad (z \rightarrow 0 \text{ என்று ஆகும் போது})$$

$\therefore w=0$, $z=0$ என்ற புள்ளிகள் முறிவுப் புள்ளிகளல்ல. எனவே மாற்றம் இணங்கு சார்பு மாற்றமாகும்.

(9) $w = \left[\frac{z+ic}{z-ic}\right]^2$ $c$ ஒரு மெய்யெண்

$$\therefore w=w_1^2 ; w_1 = \frac{z+ic}{z-ic}$$

$$\therefore z = -ic\left[\frac{w_1+1}{w_1-1}\right]$$

$|z| = |c| \left|\frac{w_1+1}{w_1-1}\right|$ என்பதால்

$|z|=|c|$ என்பது $|w_1+1| = |w_1-1|$ என்பதற்கு சமம்.

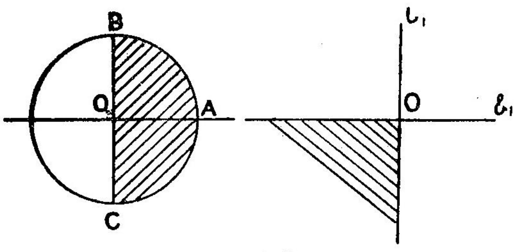
$|z|=|c|$ என்பது ஆதியை மையப்புள்ளியாகவும் $|c|$ ஐ ஆரையாகவுமுள்ள வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

$|w_1+1| = |w_1-1|$ என்பது மெய் அச்சின் மேல் $-1, 1$, என்ற புள்ளிகளுக்கு சமதூரத்திலுள்ள புள்ளிகளின் நியமப்பாதை யைக் குறிக்கும். அதாவது மெய்யிலா அச்சை குறிக்கும்.

$z=iy \quad -c \leq y \leq c$ என்ற நேர்கோட்டை நோக்குக.

$$w_1 = \frac{z+ic}{z-ic} \text{ என்பது}$$
$$= \frac{y+c}{y-c} \text{ மெய்யெண்}$$

$\therefore w_1$, 0 க்கும் $-\infty$ க்கும் நடுவே அதன் மெய் அச்சிலுள்ள மதிப்புகளை பெறும்.




படம் 8

Z—தளம் $W_1$—தளம்

$ABOCA$ என்ற அரைவட்டப் பகுதி $w_1$, தளத்தின் மூன்ருவது கால் வட்டப் பகுதியாக மாறும். மேலும் $w=w_1^2$ என்பதால்

$P e^{i\phi} = (re^{i\theta})^2$ என்க

$\therefore P=r^2 ; \phi=2\theta$

$w_1$ தளத்தின் மூன்ருவது கால் பகுதியில் $\pi \leq \theta \leq 3\pi/2$ என்ற படி $\theta$ அமையும் $\therefore 2\pi \leq \phi \leq 3\pi$ அல்லது

$0 \leq \phi \leq 2\pi$ என்றபடி $\phi$ மாறும், எனவே $w$ தளத்தில் அதன் மேல் பாதித்தளத்தை, குறிக்கும். ஆகவே $z$ தளத்தில் $|z| = c$ $-\pi/2 \leq z$ன் கோண வீச்சம் $\leq \pi/2$ என்ற அரைக் கோணப் பகுதி $w$ தளத்தில் மேல் பாதி தளமாக மாறும்.

(10) அடுக்குக்குறி (exponential) மாற்றம்.

$w = e^z$ என்ற அடுக்குக்குறி மாற்றத்தை இப்போது கவனிப் போம்.

$$w = e^{x+iy} \quad (\therefore z = x+iy)$$
$$= e^x \cdot e^{iy}$$
$$= e^x \; [\cos y + i \sin y]$$

$\therefore w = pe^{i\phi}$ எனின்

$p = e^{x} \quad \phi = y$ என்ருகும்.

$y$=மாறிலி என்ற $z$ தளத்தில் $x$ அச்சுக்கு இணையாகவுள்ள கோடு $\phi$=மாறிலி என்று மாறுவதால், $w$ தளத்தில் ஆதியின் வழியாக செல்லும் நேர்கோட்டை குறிக்கும்.

$\therefore y = k_1$, $y = k_2$ என்ற $x$ அச்சுக்கு இணையாக வரையப்படும் இரு நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள பகுதி, $w$ தளத்தில் ஆதியின் வழியாக வரையப்படும் இரு நேர்கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள பகுதியாக மாறும்.

$\frac{dw}{dz} = e^{z} \neq 0$ என்பதால், இணங்கு சார்பை முறிவுப் புள்ளிகளே கிடையாது. ஆதலின் மாற்றம் இணங்கு சார்பையாகும். குறிப்பாக $y=0$, $y=\pi$ என்ற நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள தளப் பகுதி, $w$ தளத்தில் $\phi=0$, $\phi=\pi$ என்ற நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள பகுதி. அதாவது மேல் அரைத்தளமாக மாறும். அப்படியல்லாது $0 \leq y \leq \pi$ என்றும் $-\infty \leq \phi \leq 0$ என்றும் அமையும். அரை கந்தழி துண்டுப் பகுதி, $0 \leq \phi \leq \pi$ ; $0 \leq p \leq 1$ என்று அமையும். $w$ தளத்தின் மேல் பகுதியிலுள்ள அரைவட்டமாக மாறும்.

அதே போல், $x = l_1$, $x = l_2$ என்ற அச்சுக்கு இணையாகவுள்ள கந்தழி துண்டு பகுதியானது $p = e^{l_1}$, $p = e^{l_2}$ என்று அமையும்படி இரு, ஒருமையப் புள்ளி வட்டங்களுக்கிடையேயுள்ள வளைவடிவமான பகுதியாக மாறும்.

(11) மடக்கை (lograthemic) மாற்றம்

$w = \log z$ என்ற மாற்றத்தை இப்போது நோக்குவோம்.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z} \text{ என்பதால்,}$$

$z=0$ என்ற புள்ளி முறிவுப் புள்ளியாகும். $w = \log z$ என்பதால், $z = e^{w}$ என்ருகும். ஆகவே மேற்சொன்ன மாற்றங்களை ஒன்றை மற்றென்ருக மாற்றவும், அதாவது உதாரணமாக $z$ தளத்தில் ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் இரு நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள பகுதி, $w$ தளத்தில் அதன் மெய் அச்சுக்கு இணையாக வரையப்படும் இரு நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கந்தழிப் பகுதியாக மாறும்.

**குறிப்பு :** (1) $w = e^{z}$ என்பது ஒரு மதிப்புள்ள மாற்றமாகும். ஆனல் $w = \log z$ என்பது பல மதிப்புகளுள்ள மாற்றமாகும்.

(2) $w = z^{\alpha}$ என்ற மாற்றத்தை $w = e^{\alpha \log z}$ என்று கொண்டு $w = e^{w_1}$; $w_1 = \alpha \log z$ என்ற இரு மாற்றங்களின் சேர்க்கையாக கருதவும்.

(12) $z = c \sin w$ என்ற மாற்றத்தை இப்போது நோக்குவோம். [இங்கு $c$ ஐ மெய்யெண் என்று கொள்வோம்.]

$$\begin{aligned} x+iy &= c \sin (u+iv) \\ &= c\,[\sin u \cos iv + \cos u \sin iv] \\ &= c\,[\sin u \cosh v + i \cos u \sinh v] \\ x &= c \sin u \cosh v \\ y &= \cos u \sin h\, v \end{aligned}$$

$v$ ஐ ஒரு மாறிலி என்று கொண்டால்

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 v} + \frac{y^2}{c^2 \sin h^2 v} = 1 \quad \text{I}$$ என்றாகும்.

எனவே $v$க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகள் கொடுத்தால் I என்பது ஒரு குவியமுள்ள நீள் வட்டங்களாகும்.

மேலும் $u = \pm \pi/_2$; $v = \pm \lambda$ என்ற கோடுகளாலான நீண்ட சதுரத்தை $w$ தளத்தில் எடுத்துக்கொள்க. $u = \pm \pi/_2$ என்பதால் $\cos u$ எப்போதும் நிறையெண்ணுகவே இருக்கும். $v = \lambda$ என்றால் $\lambda = \cos u \sinh \lambda$ என்பதால், $y$ ஒரு நிறை யெண்ணுகும். ஆனால் $x$ என்பது $-c \cosh\lambda$ என்பதிலிருந்து $c \cosh\lambda$ என்ற மதிப்பு வரை மாறும். அதாவது $y$ ஒரு நிறை எண் என்பதாலும், $x$ $(-c \cos h\lambda, c \cos h\lambda)$ என்ற இடைவெளியில் இருப்பதாலும், $w$ தளத்திலுள்ள மேற்சொன்ன நீண்ட சதுரம், $x$-அச்சின் மேல் பக்கத்திலுள்ள அரை நீள்வட்டமாக மாறும்.

$u = -\pi/_2$ என்றால், $y = 0$, $x = -c \cosh v$ என்றாகும். எனவே $v$ என்பது $-\lambda$ விருந்து $+\lambda$ வரை மாறும்போது $x = -c \cosh\lambda$; $x = -c \cos \dot{0} = -c$; $x = -c \cosh\gamma$; என்று ஆகிறது. அதாவது $x$ என்பது $-c \cosh\lambda$ என்ற உச்சிப் புள்ளியிலிருந்து $-c$ என்ற குவியப்புள்ளிக்கு வந்து $-c \cos h\lambda$ என்ற உச்சிப் புள்ளிக்கும் திரும்பும்.

அதேபோல் $v = -\lambda$ என்றால், $z$ என்பது $x$ அச்சின் கீழ் பாகத்தி லுள்ள அரை நீள் வட்டமாக மாறும். $u = \pi/_2$ என்று கொள்ளும் போது $y = 0$, $x = c \cos hv$ என்றாகும். அப்போது $x$, $c \cos h\lambda$ என்ற உச்சி புள்ளியிலிருந்து $c$ என்ற குவியப் புள்ளிக்கு வந்து $c \cos h\lambda$ என்ற உச்சிப்புள்ளிக்கு திரும்பும்.

எனவே $w$ தளத்திலுள்ள $u=\pm\pi/2$ $v=\pm\lambda$ என்ற நேர்கோடுகளாலான நீண்ட சதுரமானது $z$ தளத்தில் நீட்டச்சின் இரு முனைப் புள்ளிகளிலிருந்து அதற்கு சமீபத்திலுள்ள குவியப்புள்ளிகளுக்கு இரு பிளப்புகளைக் கொண்ட நீள் வட்டமாக மாறும்.

**குறிப்பு :** $z=c\sin w$ ($c$ மெய்யெண்) எனின் $w=\sin^{-1}(z/c)$ என்றகும். எனவே $w$, $z$ஐ பொருத்து முடிவில்லாத பல மதிப்புகளுள்ள சார்பாகும்.

**மாதிரிக் கணக்குகள்**

(1) $w=\dfrac{2z+3}{z-4}$ என்ற மாற்றம் $x^2+y^2-4x=0$ என்ற வட்டத்தை $4u+3=0$ என்ற கோடாக மாற்றுகிறது எனக் காண்பிக்க.

$$w=\frac{2z+3}{z-4}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore z&=\frac{4w+3}{w-2}\\ \bar{z}&=\frac{4\bar{w}+3}{\bar{w}-2}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-4x=0$ என்பதை $(x+iy)(x-iy)-4x=0$ என்று எழுதலாம்.

$2x=z+\bar{z}$ என்பதாலும், (1) ஆலும் இந்த சமன்பாடு.

$$\frac{4w+3}{w-2}\cdot\frac{4\bar{w}+3}{\bar{w}-2}=2\left(\frac{4w+3}{w-2}+\frac{4\bar{w}+3}{\bar{w}-2}\right)=0$$

$$\therefore 2(w+\bar{w})+3=0$$

$$4u+3=0\ (\because w+\bar{w}=2u)$$

இது $z$ தளத்தில் ஒரு நேர்க்கோடு ஆகும்.

(2) $w=\dfrac{5-4z}{4z-2}$ என்ற மாற்றம் $|z|=1$ என்ற வட்டத்தை $w$ தளத்தில் ஒரு நீள ஆரமுள்ள வட்டமாக ஆக்குகிறது என்று நிறுவுக. இந்த வட்டத்தின் மையத்தையும் கண்டுபிடிக்க.

$$w=\frac{5-4z}{4z-2}\qquad\therefore z=\frac{2w+5}{4w+4}$$

$$\bar{z}=\frac{2\bar{w}+5}{4\bar{w}+4}$$

$$z\bar{z} = \frac{2w+5}{4w+4} \cdot \frac{2\bar{w}+5}{4\bar{w}+4}$$

$$= \frac{4(u^2+v^2) + 20u+25}{16(u^2+v^2+2u+1)} \qquad \because w = u+iv, \; w\bar{w} = u^2+v^2, \; w+\bar{w} = 2u$$

$=$ மெய்யெண் ( $\therefore$ $u, v$ மெய் எண்கள்)

$|z| = 1$லிருந்து $|z|^2 = 1$ அதாவது $z\bar{z} = 1$ $\therefore$ $4(u^2+v^2)+20u+25 = 16(u^2+v^2+2u+1)$ அதாவது $u^2+v^2+u-\frac{3}{4}=0$. இது $w$ தளத்தில் வட்டத்தைக் குறிக்கிறது. இவ்வட்டத்தின் மையம் $(-\frac{1}{2}; 0)$

ஆரம் : $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

## பயிற்சி

1. $w = \dfrac{iz+2}{4z+i}$ என்பது $z$ தளத்திலுள்ள மெய்யச்சை $w$ தளத்திலுள்ள வட்டத்திற்கு மாற்றுகிறது என நிறுவுக. இவ்வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் காண்.

2. $\alpha$, மெய்யெண் மாறிலி என்றும், $w = \dfrac{ze^{\alpha} - i}{z - ie^{\alpha}}$ என்றும் கொள்க. $z$ தளத்தில் மெய்யச்சுக்கு ஒத்த $w$ தளத்திலுள்ள வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் காண்.

3. $\lambda$ மெய்யெண் : $a, b$ ; சிக்கலெண்கள் : $|a| > |b|$ என்றால் $w = e^{i\lambda} \dfrac{az+b}{\bar{a}+\bar{b}z}$ என்ற மாற்றம் $|z| = 1$ என்ற வட்டத்தின் அகத்தை $|w| = 1$ என்ற வட்டத்தின் அகத்திற்கு மாற்றுகிறதெனக் காண்பிக்க.

4. $\bar{a}wz - bw + \bar{b}z + a = 0$ என்ற மாற்றம் $|\bar{b}| \neq |a|$ என்றால் $|z| = 1$ என்ற வட்டத்தை $|w| = 1$ என்ற வட்டத்திற்கு மாற்றுகிறது என நிறுவுக.

5. $|w| = 1$ என்ற வட்டத்தை $|z-1| = 1$ என்ற வட்டத்திற்கும், $w=0$, $w=1$ என்ற புள்ளிகளை முறையே $z=\frac{1}{2}$, $z=0$ என்ற புள்ளிகளுக்கு மாற்றும் மோபீஸ் மாற்றத்தைக் காண்க.

6. $(w+1)^2 = \dfrac{4}{z}$ என்றால் $w$ தளத்தில் உள்ள ஒரு நீள ஆரமுள்ள வட்டத்திற்கு $z$ தளத்துள்ள பரவளையம் ஒத்தது எனவும், வட்டத்தின் அகம் ஆனது பரவளையத்தின் புறத்துக்கு ஒத்தது எனவும் நிறுவுக.

# 4. சிக்கல் தொகையிடல்
## (Complex Integration)

### 4·1. இப்போது சிக்கலெண்ணைக் கொண்ட சார்பலனின் தொகையிடலை விவரிப்போம்.

$\alpha \leq t \leq \beta$ என்று கொண்டு $x = \phi(t)$ ; $y = \Psi(t)$ என்ற இரு சமன்பாடுகளும் ஒரே சமதள வளைக்கோட்டின் வில்லைக் குறிக்கும். $t$ அடைபட்டுக் கிடக்கும் இடைவெளி $(\alpha, \beta)$ ஐ

$\alpha = t_0, \ t_1, \ t_2 \ldots t_n = \beta$ என்ற புள்ளிகளலால் பிரிக்கவும். $t = t_r$ என்றால் $x = \phi(t_r)$ ; $y = \Psi(t_r)$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்கும். இதை $p_r$ என்று குறித்தால், வளைகோட்டில் $p_0, \ p_1, \ p_2, \ p_3 \ldots p_n$ என்ற புள்ளிகள் உண்டாகும். இந்த பல கோணத்தின் நீளம் $\sum_{r=1}^{n} p_{r-1} \, p_r$ ஆகும்.

$$\therefore \text{ நீளம் } = \sum_{\pi=1}^{n} \left\{ (x_r - x_{r-1})^2 + (y_r - y_{r-1})^2 \right\}$$

இந்த நீளம், $(\alpha, \beta)$ என்ற இடைவெளியை பிரிக்கும் புள்ளிகளைப் பொருத்ததாகும். எனவே $(\alpha, \ \beta)$ இடைவெளியை பல்வேறு விதமாக புள்ளிகளாய் பிரித்தால், பல கோணத்தின் நீளம் மாறும். அப்படி ஏற்படும் வெவ்வேறு நீளங்களுக்கு $\lambda$ என்று ஒரு மேல் எல்லை (upper bound) இருக்குமானால், அந்த வளைகோட்டை, நீளம் காணும் வளைகோடு (rectifiable curve) என்போம். அதன் நீளம் $\lambda$ என்க. இப்போது அதன் நீளம் $\lambda$ஐ கண்டுபிடிப்பதெப்படி என்று ஆராய்வோம்.

$\phi(t)$ ; $\Psi \ (t)$ என்ற இரு சார்பலன்கள் $(\alpha, \beta)$ என்ற இடைவெளியில் எல்லையோடு மாறுவதாக (bounded variation) கொள்வோம். மேலும் $\phi^1(t)$ ; $\Psi^1(t)$ என்பவை தொடர்ச்சியான சார்பலன்

கவென்று கொண்டால், $x = \phi(t)$ ; $y = \phi(t)$ என்ற சமன்பாடுகள் நிர்ணயிக்கும் வளைகோடு $\alpha \le t \le \beta$ என்ற இடைவெளியில் நீளம் காணும் வளைகோடாகவும், அதன் நீளம்

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\{\phi^1(t)\}^2 + [\Psi^1(t)]^2} \quad dt$$

என்றும் ஆகும்.

எனவே $z = \phi(t) + i\Psi(t)$ என்ற ஜோர்டான் வளை கோட்டை $\alpha \le t \le \beta$ என்ற இடைவெளியில் நிர்ணயித்து, $\phi^1(t)$ ; $\Psi^1(t)$ என்ற சார்பலன்களைத் தொடர்ச்சியாகக் கொண்டால், ஜோர்டான் வளைகோடு ஒழுங்கானதாகும். அதன் நீளம் மேற்கண்டபடி

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\phi^1(t)]^2 + [\Psi^1(t)]^2} \quad dt \text{ எனலாம்.}$$

இப்போது உருவரை (contour) ஐ வரையறுப்போம். முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள ஒழுங்கான வில்களைக்கொண்ட ஒரு தொடர்ச்சியான ஜோர்டான் வளைகோட்டை உருவ வரை என்போம். எனவே ஒரு உருவ வரை நீளம் காணும் வளை கோடாகும்.

**வரையறை :**

$z$ என்ற சிக்கல் மாறியிலான சார்பலனின் தொகையை வரையறுப்போம்.

$z$ என்ற சிக்கல் மாறியிலான சார்பலன் $f(z)$, $A$, $B$, என்ற புள்ளிகளை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட ஒழுங்கான வில்லின் மேல், தொடர்ச்சியானதாகக் கொள்க. $L$ என்ற வில்லில் $A = z_0$, $z_1, z_2, \ldots z_n = B$ என்று $n-$புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்க. $z_{r-1}, z_r$ என்ற வில்லின் பகுதியில் $\zeta_r$ என்ற புள்ளியைக் காண்க.

$$\sum_{r=1}^{n} [f(\zeta_r)\{z_r - z_{r-1}\}] \text{என்ற கூட்டல்}$$

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ என்றும்

$\zeta_r = \xi_r + i\,\eta_r$ என்றும் கொண்டால்

$[u_r = u(\xi_r, \eta)$ ; $v_r = v(\xi_r\, \eta_r)$ என்று எழுதுக.$]$

$$\sum_{r=1}^{n} [(u_r + iv_r)(x_r + iy_r - x_{r-1} - iy_{r-1})] \quad (1)$$

என்ருகும்.

ஆனால் $$x_r - x_{r-1} = \phi(t_r) - \phi(t_{r-1}) = (t_r - t_{r-1})\, \phi^1(எ_r)$$

அதைபோல் $$y_r - y_{r-1} = \Psi(t_r) - \Psi(t_{r-1}) = (t_r - t_{r-1})\, \Psi^1(எ_r^1)$$

இங்கே $எ_r$ $எ_r^1$ என்பவை

$t_r - 1 < எ_r < t_r$; $t_{r-1} < எ_r^1 < t_r$ என்ற சமமின்மைகளுக்கு கட்டுப்பட்டிருக்கும். எனவே (1) என்பது

$$\sum_{r=1}^{n} [(u_r + iv_r)\{\phi^1(எ_r) + i\,\Psi^1(எ_r^1)\}(t_r - t_r - 1)] \quad (2)$$

என்றாகும். இங்குள்ள சார்பலன்கள் $u_r$, $v_r$, $\phi^1 t$, $\Psi^1(t)$ என்பவை தொடர்ச்சியானவையாதலால் அவைகள் எல்லாம் ஒரே சீரான தொடர்ச்சியானவை (uniformly continuous) எனவே $\epsilon > 0$ என்று கொடுக்கப்பட்டால், அதற்குத் தகுந்தபடி $\delta(t)$ என்பதைக் கண்டு பிடித்து $|t_r - t_r - 1| < \delta$ என்ற சமமின்மைக்கும்

$$|u_r\, \phi^1(எ_r) - u(x_r, y_r)\, \phi^1(t_r)| < \epsilon$$

என்றாகும். மேலும்

$$\sum_{r=1}^{n} [\epsilon\,(t_r - t_r - 1)] = \epsilon\,(t_n - t_o)$$

$\therefore$ $\epsilon$, $\delta$ என்பவை "O"வை அணுகும்போது

$$\sum_{r=1}^{n} [u_r\, \phi^1(எ_r)(t_r - t_r - 1)]\,;\quad \sum_{r=1}^{n} [u(x_r, y_r)]\, \phi^1(t_r) \times (t_r - t_r - y)$$

என்பதை அணுகும்.

இதன் எல்லை (limit) $$\int_{\alpha}^{\beta} u\{\phi(t), \Psi(t)\}\, \phi^1(t)\, dt$$

என்பது தெளிவு. அதைபோல் $\epsilon$, $\delta \to o$ ஆகும்போது (2)ன் மற்ற உறுப்புகள் எல்லைகளை அணுகும். எனவே (2)

$$\int_{\alpha}^{\beta} [u + iv)\{\phi^1(t) + i\,\Psi^1(t)\}]\, dt \text{ என்ற} \quad \to (3)$$

எல்லையை அணுகும். இந்த எல்லையை, ⌊ என்ற வில்லின் வழி $f(z)$ என்ற சார்பலனின் சிக்கல் தொகை என்போம். இதையே $\int_{⌊} f(z)\, dz$ என்று குறிப்போம். அதாவது

$$\int_{⌊} f(z)\, dz = \int_{\alpha}^{\beta} [(u+iv)\,\{\phi^1(t)+i\,\Psi^1(t)\}]\, dt \text{ என்ருகும்.}$$

$C$ என்ற உருவரை முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள $⌊_r$ என்ற ஒழுங்கான வில்களைக் கொண்டிருந்தால்

$$\int_{C} f(z)\, dz = \sum_r \int_{⌊_r} f(z)\, dz \text{ என்றிருக்கும்.}$$

## 4·2. தேற்றம் I உருவரையின் மேல் வரம்பு (Upper bound of a Contour Integral)

"$l$" நீளமுள்ள ⌊ என்ற உருவரையின் மேல் $f(z)$ என்பது தொடர்ச்சியான சார்பலன் என்க. மேலும் $|f(z)| \leq M$ என்றும் கொள்க.

$$\text{அப்போது } \left| \int_{⌊} f(z)\, dz \right| \leq Ml \text{ என்ருகும்.}$$

⌊ என்பதை ஒழுங்கான வில்லாகக் கொள்க.

$$\left| \int_{⌊} f(z)\, dz \right| = \left| \int_{⌊}^{\beta} (u+iv)\{\phi^1(t)+i\Psi^1(t)\}\, dt \right|$$

$$\leq \int_{\alpha}^{\beta} |u+iv| \; |\phi^1(t)+i\Psi^1(t)|\, dt$$

$$\leq \int_{\alpha}^{\beta} M\; [\{\phi^1(t)\}^2+\{\Psi^1(t)\}^2]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\leq Ml$$

## 4·3. தேற்றம் II கோசியின் தேற்றம் (Cauchy's Theorem)

$f(z)$ என்பது ஒழுங்கான சார்பலனுகவும், $C$ என்ற மூடிய உருவரையின் மேலும், அதற்குள்ளேயுமுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $f^1(z)$ தொடர்ச்சியான பலனுகவும் கொள்க.

$\int_C f(z)\,dz = 0$ என்று நிரூபி.

$C$ன் மேலும் அதற்குள்ளேயுமுள்ள புள்ளிகளைக் கொண்ட அரங்கத்தை $D$ என்று குறிக்க.

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u+iv)\,d(x+iy)$$

$$= \int_C u\,dx + i\,u\,dy + i\,v\,dx - v\,dy$$

$$= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy)$$

ஆனல் கிரீன்ஸ் தேற்றத்தின்படி

$$\int_C p\,dx + q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy$$

[ இங்கு $p$, $q$, $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ என்ற எல்லா சார்பலன்களும் தொடர்ச்சியான வகையாக இருக்கவேண்டும்.]

மேலும் $f^1(z) = u_x + iv_x$

$$= u_x - iu_y \quad \left[\because \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right.$$

$f'(z)$ என்பது தொடர்ச்சியான சார்பலனுகும்.

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = -\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$+ i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\ ;\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$$ [கோ. இ. சமன்பாடுகளின்படி.]

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = 0.$$

**குறிப்பு:** (*a*) மேற்கண்ட தேற்றம் சரியாக இருக்க $f'(z)$, தொடர்ச்சியான சார்பலனாக இருக்க வேண்டியதில்லை யென்று கோர்சார்ட் (Goursat) என்ற கணித மேதை நிரூபித்தார். தேற்றத்தை நிரூப, $D$ அரங்கிலுள்ள எல்லாப்புள்ளிகளிலும் $f'(z)$ வரையறுத்தால் போதுமானதாகும்.

(*b*) $C$ என்ற மூடிய உருவரையின் மேலும் அதனுள்ளும் அமைந்த புள்ளிகளில் $f(z)$ ஒழுங்கானதாக இருந்தால், $\int_C f(z)\ dz = 0.$

இந்தத்தொகை இருக்கிறது. ஏனெனில் ஒழுங்கான சார்பு $f(z)$ தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. மேலும் தொடர்ச்சியான சார்பு தொகையிடத்தக்கது. உருவரை $C$ ன் வெளிஎல்லைக் (அதாவது புற எல்லை) கோடாகக்கொண்டு, $x$ —, $y$ — அச்சுகளுக்கு இணையான கோடுகளால் ஆக்கப்பட்ட சதுரங்களை அமைத்தோமானால், $C$ ஆனது **வலைக்கண்களின் தேறிய வேலை** (net work of meshes) யாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. இவ்வலைக்கண்கள் சதுரங்களாகவோ, சதுரங்களின் பாகங்களாகவோ பிரிக்கப்படுகின்றன.

$C$ வரையப்பட்ட திசையிலேயே வரையப்பட்ட வலைக்கண்ணின் (mesh) எல்லைக்கோடு (boundary) $\gamma$ என்றால்

$$\int_C f(z)\,dz = \Sigma \int_\gamma b(z)\ d(z)$$

"$a$" நீளமுள்ள சதுரவரை $S$ ன் உள்ளே $z_0$ என்ற புள்ளி இருக்குமாயின் $|\ z-z_0\ | < a\sqrt{2}$ என்பதாலும் $S$ ன் நீளம் $4a$ என்பதாலும்.

$$\left|\int_S (z-z_0)\ dz\right| < 4\ \sqrt{2}\ a^2 = 4\sqrt{2}\ \times$$ சதுரம் $S$ ன் பரப்பு

என்பது உண்மை.

இப்போது இரு துணைத் தேற்றங்களை நிறுவலாம்.

**துணைத்தேற்றம் : Lemma 1.**

$C$ ஆனது மூடிய உருவரையானுல், $\int_C dz = 0 \int_C zdz = 0$

**நிறுவல் :**

$$\int_C dz = \lim \sum_{r=1}^{n} \{ (z_r - z_{r-1}) \cdot 1 \} = 0.$$

$$\therefore \max | z_r - z_{-1} | \to 0.$$

மேலும் $\int_C zdz = \lim \Sigma \{ z_r (z_r - z_{r-1}) \}$

$$= \lim \Sigma \{ z_{r-1} ( z_r - z_{r-1}) \}$$

$$= \frac{1}{2} \lim \Sigma \{ (z_r + z_{r-1}) (z_r - z_{r-1}) \}$$

$$= \frac{1}{2} \lim \Sigma (z_r^2 - z_{r-1}^2)$$

$$= 0$$

**துணைத்தேற்றம் 2 :** "கூர்சா" வின் துணைத்தேற்றம் (Goursat's Lemma)

கொடுக்கப்பட்ட $\epsilon$ க்கு, தகுந்த குறுக்குக்கோடுகளால் $C$ யின் அகத்தை மூடியுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள வலேக் கண்காளாகப் பிரிக்கலாம். இவ்வலேக்கண்கள் சதுரங்களாகவோ, சதுரங்களின் பாகங்களாகவோ அமையலாம். அப்படியானுல் ஒவ்வொரு வலேக் கண் $S$ன் உள்ளே ஒரு புள்ளி $z_0$ ஆனது

$$f(z) - f(z_0) = f^1(z_0)(z - z_0) + \epsilon_r | z - z_0 |$$
$$\forall z \epsilon s, \quad | \epsilon_r | < \epsilon \quad (1)$$

என்றவாறு இருக்கிறது.

**நிறுவல் :**

இத்துணைத் தேற்றம் பொய்யெனக்கொள்க.

$C$ ஐ எவ்வகையிலாயினும் துண்டங்களாக்கினுலும், குறைந்த பட்சம் ஒரு வலேக்கண்ணுவது (1) ஆனது பொய்யாகும் வகையில் இருக்கும். அப்படியானுல், $C$ ன் மீதோ, உள்ளேயோ, ஒரு புள்ளி $z$ ஆனது $f(z)$ ஆனது வகையிடத்தக்கதல்ல என்றவாறு இருக்கிறது எனக்காண்பிக்கலாம்.

$C$ ஐ $\Gamma$ என்னும் பெரிய சதுரத்தில் அடைக்கவும். $\Gamma$ ன் பரப்பு $A$ என்றிருக்கட்டும். $\Gamma$ ஐ நன்னான்கு பாகங்களாக வெட்டவும் (quadrisection). அப்படிச் செய்யும்போது, $\Gamma$ ன் ஒரு பாகத்துக்கு (1) ஆனது பொய்யாகட்டும். அப்பாகம் $\Gamma_1$ என்க. $\Gamma_1$ ஐ மறுபடியும் நன்னான்கு பாகமாக்கு. $\Gamma_1$ ன் ஒரு பாகத்தை எடுத்துக்கொள். இதனை $\Gamma_2$ என்க. இதுபோல் $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ ..........$\Gamma_n$ என்ற முடிவில்லாத சதுரங்களின் ஒழுங்கு வரிசை (sequence) ஆனது, ஒரு பாகம் அதற்கு முந்தைய பாகத்துள் அடங்கும் வகையில், கிடைக்கின்றது. இந்த ஒழுங்கு வரிசையின் எல்லைப் புள்ளி $\zeta$ என்க. இந்த $\zeta$ ஆனது $C$ ன் உள்ளே அல்லது அதன் மேல் இருக்க வேண்டுமென்பது தெளிவு.

$f(z)$ ஆனது $\zeta$ இடத்து வகையிடத்தக்கமையால்,

$$f(z)-f(\zeta)=f^1(\zeta)\,(z-\zeta)+\epsilon\zeta\ \,|\,z-\zeta\,|$$

இவ்விடத்து, $|\,z-\zeta\,|$ ன் சிறிய மதிப்புகளுக்கு $|\,\epsilon\zeta\,|<\epsilon$, என்றவாறு சிறிய $|\,z-\zeta\,|$ க்குத்தக்கவாறு $\zeta$ ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்துள்ளே எல்லா $\Gamma_r$ ம் ஒரு குறிப்பிட்ட $\Gamma_m$ ஐத் தவிர இருக்கின்றன. இது ஒரு எதிர் மறுப்பு. ஏனெனில் $\zeta$ வை $z_0$ ஆக எடுத்துக் கொண்டால் சமன்பாடு (1) ஆனது மெய்யாகி விடுகின்றது. ∴ கூர்சாவின் துணைத்தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

### கோசித் தேற்றத்தின் நிறுவல்

$C$ன் அகத்தைப் பற்றி அல்லாது $C$ன் புறத்தைப் பற்றி நமக்குக் கவலை இல்லை. $C$ன் அகத்தைப் பிரிப்பதால் கிடைக்கும் வலைக் கண்களில் சில சதுரங்கள், மற்றவை ஒழுங்கற்றவை. ஒவ்வொரு வலைக்கண்ணின் எல்லைக் கோட்டைச் சுற்றி, (1) ஐத் தொகையிட்டால், துணைத்தேற்றம் (1) ன் படி

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \epsilon\gamma\,|\,z-z_0\,|\,dz$$

∴ எல்லா வலைக் கண்களுக்கும்

$$\int_C f(z)\,dz = \Sigma \int_\gamma \epsilon\gamma\,|\,z-z_0\,|\,dz$$

என்பதில்

$$\left|\int_C f(z)\,dz\,\right| \leq \Sigma \int_\gamma \epsilon\,\gamma\,|\,z-z_0\,|\ \ |\,dz\,|$$

$\gamma$ ஆனது முழுச்சதுரமாக இல்லையெனில், $\gamma_1$ ஐ நேர்க்கோடுகளைக் கொண்ட $\gamma_1$ ஆகவும் $C$ன் பாகங்களைக் கொண்ட $\gamma_2$ ஆகவும் பிரிக்கலாம்.

$| \epsilon_8 | < \epsilon$ என்பதால்

$$\Sigma \left| \int_{\gamma_1} \epsilon_\gamma \; | z - z_0 | \; | dz | \right| < \epsilon \, 4 \sqrt{2} \; A$$

இதில் $A$ என்பது $C$ஐ உடைய பெரும் சதுரம் $\Gamma$ன் பரப்பாகும். மேலும் $\gamma_2$ பகுதிகளின் நீளங்களின் தொகையானது நீளம் காணத்தக்க வளைகோடு $C$ன் நீளம் $l$க்கு மிகையானது.

$\Gamma$ன் மூலை விட்டத்தின் நீளம் $K$ என்க.

$\because \; | z - z_0 | \leq k$

$$\therefore \; \Sigma \left| \int_{\gamma_2} \epsilon_r \; | z - z_0 | \; | dz | \right| < k \, l \, \epsilon$$

$$\therefore \left| \int_C f(z) \, dz \right| < B \epsilon$$ , $B$ ஒரு மாறிலி.

$\epsilon$ என்பது யாதாவதொரு எண்ணுதலால் தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

## 4.4. கோசியின் தொகையும், ஒழுங்கான சார்பின் வகைக்கெழுக்களும்

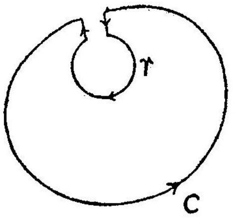
கோசியின் தொகையின் உதவியால் மூடிய உருவரை $C$ன் ஏதாவதொரு புள்ளியிடை ஒழுங்கான சார்பு $f(z)$ன் மதிப்பை எழுதலாம்.

### தேற்றம் III

மூடிய உருவரை $C$ன் மீதும், உள்ளேயும் $f(z)$ ஆனது ஒழுங்கானது என்றால்

$$\frac{1}{2 \pi i} \int_C \frac{f(z) \, dz}{z - \zeta} = f(\zeta)$$

$C$ன் உள்ளே முழுமையாக இருக்குமாறு $\delta$ ஐ ஆரமாகவும் $z = \zeta$ ஐ மையமாகவும் வைத்து ஒரு சிறிய வட்டம் வரைக. $C$க்கும் $\gamma$க்கும் இடையேயுள்ள வெளியில் $\phi(z) = \dfrac{f(z)}{z-\zeta}$ ஆனது ஒழுங்காய் உள்ளது.




படம் 9

$C$ன் ஏதாவதொரு புள்ளியை $\gamma$ன் ஏதாவது ஒரு புள்ளியை இணைக்குமாறு குறுக்கு வெட்டி (cross cut) ஒன்றை அமைத்தால் $\Gamma$ என்ற மூடிய உருவரை கிடைக்கின்றது. இவ்வுருவரையில் $\phi(z)$ ஆனது ஒழுங்காய் உள்ளது. ஆதலால் கோசியின் தேற்றப்படி

$$\int_{\Gamma} \phi(z)\, dz = 0$$

உருவரை $\Gamma$ வை இடஞ்சுழியாகச் சுற்றினால் குறுக்கு வெட்டி ஆனது இரு தடவை சுற்றப்படுகிறது.

$$\therefore \int_{C} \phi(z)\, dz - \int_{\gamma} \phi(z)\, dz = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \phi(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)\, dz}{z-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)\, dz}{z-\xi}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\, dz \qquad (2)$$

$\gamma$ன் மீது $z - \zeta = \delta e^{i\theta}$

$\therefore \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma} \dfrac{f(\zeta)\, dz}{z-\zeta}$ ஆனது

$\dfrac{f(\zeta)}{2\pi i}\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \dfrac{\delta i e^{i\theta}\, d\theta}{\delta e^{i\theta}} = f(\zeta)$ என்றாகிறது.

**தேற்றம் Iன் படி**

$$\max_{\gamma} \; |f(z) - f(\zeta)| \; 2\pi\delta \not> \frac{1}{2\pi i}\left|\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(\zeta)\, dz}{z-\zeta}\right|$$

$f(z)$ ஆனது $z=\xi$ இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதால் மேற் கண்ட சமனின்மையில் இடது பக்கத்து கோவை ஆனது $\delta \to 0$ என்னும்போது $O$ஐ நெருங்குகிறது.

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z-\xi} = f(\xi)$$

**தேற்றம் IV**

$D$ என்பது ஒரு அரங்கமென்றும், $D$ல் $C$ ஆனது $z=\xi$ஐச் சுற்றியுள்ள சிக்கலற்ற மூடிய உருவரை யென்றும் கொள்க. $f(z)$ ஆனது $D$ அரங்கத்தில் ஒழுங்கானதென்றால் அதன் வகைக் கெழு ஆனது.

$$f^1(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-\xi)^2}$$

**நிறுவல்**

**தேற்றம் IIIன் படி.**

$$\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{h}\left(\frac{1}{z-\xi-h}-\frac{1}{z-\xi}\right) f(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left\{\frac{f(z)}{(z-\xi)^2} + \frac{h\,f(z)}{(z-\xi)^2(z-\xi-h)}\right\}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-\xi)^2} + I$$

$C$ன் மீதும், உள்ளேயும் $f(z)$ ஆனது ஒழுங்கானதால் $f(z)$ ஆனது வரம்புள்ளது.

$\therefore$ $C$ன் மீது, $|f(z)| \leq M$

$C$ன் புள்ளிகளுக்கும் $\xi$க்கும் இடையே உள்ள தூரங்களின் கீழ் வரம்பு $d$ என்க.

$|h| < \frac{1}{2}\delta$ என்றவாறு $h$ ஆனது மிகச் சிறியதாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால்,

$|I| < \frac{|h|}{2\pi} \cdot \frac{Ml}{d^2 \cdot \frac{1}{2}d}$ இதில் "$l$" என்பது $C$ன் நீளம்

$|h| \to 0$ என்றால் $\frac{|h|}{2\pi} \cdot \frac{Ml}{d^2 \cdot \frac{1}{2}d} \to o$

$\therefore |I| \to 0$

$$\therefore f^1(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-\xi)^2}$$

**தேற்றம் V**

$f(z)$ ஆனது அரங்கம் $D$ல் ஒழுங்கானதாய் இருந்தால், $D$ன் ஒவ்வொரு புள்ளி $\xi$ இடத்து $f(z)$க்கு எல்லா வரிசைகள் உடைய வகைக்கெழுக்கள் உள்ளன. அவற்றின் மதிப்புகள்

$$f^{n}(\xi) = \frac{\underline{|n}}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z-\xi)^{n+1}}$$

தேற்றமானது $n=m$க்கு உண்மையென்க.

$$\text{அதாவது } f^{m}(\xi) = \frac{\underline{|m}}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z-\xi)^{m+1}}$$

என்பது உண்மை.

$$\frac{f^{m}(\xi+h) - f^{m}(\xi)}{h}$$

$$= \frac{1}{h} \frac{\underline{|m}}{2\pi i} \left[ \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z-\xi-h)^{m+1}} - \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z-\xi)^{m+1}} \right.$$

$$= \frac{1}{h} \frac{\underline{|m}}{2\pi i} \int_C \frac{1}{(z-\xi)^{m+1}} \left[ \left(1 - \frac{h}{z-\xi}\right)^{-(m+1)} - 1 \right] f(z)\, dz$$

$$= \frac{1}{h} \frac{\underline{|m}}{2\pi i} \int_C \frac{1}{(z-\xi)^{m+1}} \left[ (m+1) \frac{h}{z-\xi} + \frac{(m+1)(m+2)h^2}{\underline{|2}\,(z-\xi)^2} + \cdots \right] f(z)\, dz$$

$\left| \frac{h}{z-\xi} \right| < 1$ என்பது தெளிவு.

$$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f^{m}(\xi+h) - (f^{m}(\xi)}{h}$$

$$= \frac{\underline{|m+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z-\xi)^{m+2}} + \frac{\underline{|m+2}}{2\pi i\, \underline{|2}} \int_C \frac{h f(z)\, dz}{(z-\xi)^{m+3}}$$

$$\text{(i.e.) } f^{m+1}(\xi) = \frac{\underline{|m+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z-\xi)^{m+2}}$$

∴ தேற்றமானது $n=m+1$க்கு உண்மை ஆனால் தேற்றமானது $n=1$க்கு உண்மை.

$\therefore n=2$க்கு அதே தேற்றம் உண்மை. $\therefore$ $n$ன் எல்லா நேர் முழு வெண் மதிப்புகளுக்குத் தேற்றம் உண்மை.

$$\therefore f^{n}(\xi) = \frac{\lfloor n}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-\xi)^{(n+1)}}$$

## 4·5. தேற்றம் VI : டேலரின் தேற்றம்

$|z-a| \leq p$ல் $f(z)$ ஆனது ஒழுங்கானது என்றும் $|\xi-a| = r\ (< p)$ என்றவாறு $\xi$ என்ற புள்ளி உண்டென்றும் கொண்டால்

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} an\,(\xi-a)^{n}$$

$$\text{இங்கு } a\,n = \frac{f^{n}(a)}{\lfloor n}$$

**நிறுவல் :**

$r<p^1<p$ என்றவாறு $z=a$ என்ற புள்ளியை மையமாக வைத்து $p^1$ ஆரமுள்ள வட்டம் $C$ என்க.

$$\frac{1}{z-\xi} \equiv \frac{1}{z-a} + \frac{\xi-a}{(z-a)^2} + \dots + \frac{(\xi-a)^{n-1}}{(z-a)^{n}} + \frac{(\xi-a)^{n}}{(z-a)^{n+1}}\cdot\frac{1}{(z-\xi)}$$

என்ற முற்றொருமையைக் கருதுக.

ஒவ்வொரு உறுப்பையும், $\dfrac{f(z)}{2\pi i}$ ஆல் பெருக்கி $C$ஐச் சுற்றித் தொகை காணவும்

$$f(\xi) = f(a) + f'(a)(\xi-a) + f''(a)(\xi-a)^2 + \dots + \frac{f^{n-1}(a)}{\lfloor n-1}(\xi-a)^{n-1} + R_n$$

$$R_n = \frac{(\xi-a)^{n}}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n}(z-\xi)}$$ என்பதை அடைவோம்.

$R_n$ ஆனது டேலர் மீதி எனப்படும். $C$ன் மீது, $|f(z)| \leq M$ என்பதால் $|R_n| \leq \dfrac{r^n}{2\pi}\ \dfrac{2\pi p^1 M}{P^{1n}(p^1-r)} = k\left(\dfrac{r}{p^1}\right)$; $k$ என்பது $n$ஐச் சாராத மாறிலி $r < p^1$ என்பதால் $\lim_{n\to\infty} |Rn| = 0$

$$\therefore \sum_{0}^{\infty} an\,(\xi-a)^{n} \text{ ஆனது ஒருங்குகிறது.}$$

ஒருங்கும் தொகையானது $f(\xi)$ ஆகும். $f$ தளம் முழுமையும் $f(z)$ ஆனது ஒழுங்கானது என்றால், எல்லா $\xi$க்கும் மேற்கண்ட $f(\xi)$ன் விரிதல் உண்மையாகும்.

**கிளைத்தேற்றம்**

$|\xi - a| = r < \rho$ன் மீது $|f(z)|$ ன் மீப்பெருமம் $n(r)$ என்றால்,

$a_n = \dfrac{f^n(a)}{\lfloor n}$ என்றால் $|a_n| \le \dfrac{n(r)}{r^n}$ என்பது உண்மை.

**நிறுவல்**

$c$ என்ற வளைகோடு $|z-a| = r$ என்றால்

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} \right| \le \frac{1}{2\pi} \frac{n(r)}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n(r)}{r^n}$$

## 4·6. தேற்றம் VII லியோவி (Liouville) தேற்றம்

$f$ தளம் முழுமையிலும் $f(z)$ ஒழுங்காகவும், $|f(z)| < k$ என்றவாறும் இருந்தால் $f(f)$ ஆனது மாறிலியாகும்.

**நிறுவல்**

$z_1$, $z_2$ என்று யாதேனும் இருபுள்ளிகளைக் கருதுக. $z$ஐ மையமாகவும் $\rho \ge 2|z_1 - z_2|$ என்றவாறு $\rho$ஐ ஆரமாகவும் உடைய $C$ என்ற வட்டத்தை வரைக. $C$ன் மீது $f$ இருந்தால்

$$|z_1 - z_2| \ge \rho/2$$

**தேற்றம் IIIன் படி**

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left( \frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2} \right) f(z)\,dz$$

$$\therefore |f(z_1) - f(z_2)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_C \frac{(z_1 - z_2) f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} \right|$$

$$< \int_O^{\pi} \frac{|z_1 - z_2|\,k}{\rho/2}\,d\theta$$

$$= 2|z_1 - z_2| \frac{k}{\rho}$$

$z_1$, $z_2$ ஐ நிலையாகக் கொண்டு, $p$ ஐ $\infty$க்கு அணுகவிட்டால்,

$|f(z_1) - f(z_2)| \to 0$ என்றாகும்.

$\therefore f(z_1) = f(z_2)$

அதாவது $f(z)$ ஆனது மாறிலியாகும்.

## 4·7. தேற்றம் VIII லாரென்ட் தேற்றம்

$a$ என்ற புள்ளியை மையமாகவும், $p_1$, $p_2$ ஐ ஆரங்களாகக் கொண்டு முறையே இரு வட்டங்கள் $C_1$, $C_2$ ஐ வரைக. $p_2 < p_1$ என்க. $f(z)$ ஆனது $C_1$, $C_2$ மீதும், $C_1$, $C_2$ ஆல் ஆன வளையத்திலும் ஒழுங்கானதாக இருந்தால்

$$f(\xi) = \sum_{0}^{\infty} a_n (\xi - a)^n + \sum_{1}^{\infty} b_n (\xi - a)^{-n}$$

$\xi$ என்பது வளையத்துள் யாதேனும் ஒரு புள்ளி; கெழுக்கள் $a_n$, $b_n$ என்பன.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{n+1}} \; ; \; b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{-n+1}}$$

**நிறுவல்**

$C_1$ ன் யாதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து $C_2$ ன் யாதேனும் ஒரு புள்ளிக்கு இணைக்கும் குறுக்கு வெட்டியை அமைக்க, இதனால் நாம் பெறுவது

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)\, dz}{(x - \xi)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)\, dz}{z - \xi}$$

இப்போது

$$\frac{1}{z-\xi} = \frac{1}{z-a} + \frac{\xi - a}{(z-a)^2} + \dots + \frac{(\xi - a)^n}{(z-a)^n} \frac{1}{(z-\xi)}$$

$$-\frac{1}{z-\xi} = \frac{1}{\xi - a} + \frac{z-a}{(\xi - a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^n} \frac{1}{(\xi - z)}$$

என்ற முற்றொருமைகளைக் கருதவும்.

$$\therefore \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)\, dz}{z-\xi} = \sum_{r=o}^{n-1} a_r (\xi - a)^r + P_n$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)\, dz}{z-\xi} = \sum_{r=1}^{n} b_r (\xi - a)^{-r} + Q_n$$

என்பதில்

$$P_n = \frac{(\xi - a)^n}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^n (f - \xi)}$$

$$Q_n = \frac{(\xi - a)^{-n}}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{-n} (\xi - f)}$$

$Pn$ என்பது டேலர் தேற்றத்து மீதியாகும் தேற்றம் VI ன் படி

$$\lim_{n\to\infty} \left| Pn \right| = 0 \text{ zero}$$

மேலும்

$$|\theta_n| = \frac{1}{2\pi}\left| \int_{C_2} \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n \frac{f(z)\,dz}{z-\xi} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{P_2}{\pi}\right)^n \frac{n^1}{\pi-P_2} 2\pi P_2$$

என்பதில்

$$\pi = |\xi - a|$$

$$C_2 \text{ன் மீது } |f(z)| \leq n'$$

$P_2 < \pi$ என்பதால், $\lim_{n\to\infty} |\theta_n| = 0$

$$f_1(\xi) = \sum_0^\infty a\,n\,(\xi-a)^n$$

$$f_2(\xi) = \sum_0^\infty b\,n\,(\xi-a)^{-n} \text{ என்க.}$$

$f(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\xi)$ என்றெழுதினுல்

$P_2 \leq |\xi - a| \leq P_1$க்கு $f(z)$ ஆனது நெருங்குகிறது.

$\therefore f_1(\xi)$ ஆனது ஒழுங்கானது. மேலும் $|\xi-a| \leq P_1$க்கு $f_1(\xi)$ ஆனது ஒருங்குகிறது. $f_2(\xi)$ ஆனது ஒழுங்கானது. மேலும் $|\xi-a) \geq P_2$க்கு $f_2(\xi)$ ஆனது ஒருங்குகிறது.

## 4·8. பூச்சியங்களும் சிறப்புப் புள்ளிகளும் (Zeros and Sengularities)

கொடுக்கப்பட்ட அரங்கம் "$D$"ல் $f(z)$ ஆனது ஒழுங்கானதாக இருந்தால், $D$ன் எந்தப்புள்ளி $f=a$ இடத்து $f(z)$ ஐ டேலர் தொடராக விரிக்கலாம் என்று கண்டோம்.

$$f(z) = \sum_0^\omega a\,n\,(f-a)^n \text{ என்றும் கண்டோம்.}$$

$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots\ldots\ldots = a_{m-1} = 0,\ a\,m \neq 0.$ என்றுல், டேலர் விரித்தலில் $a_m\,(f-a)^m$ என்பது முதல் உறுப்பாகும். இவ்வகையில் $f=a$ என்றவிடத்து $m$ வரிசையுள்ள பூச்சியம் $f(\xi)$க்கு இருக்கிறது என்போம்.

$f=b$ என்றவிடத்து $f(z)$ ஒழுங்கற்றது, எனில் $f$ $(f)$ க்கு அப்புள்ளியானது சிறப்புப்புள்ளி என்று சொல்லுவோம்.

ஒரு அரங்கம் "$D$"ல் தனித்த மடிப்புப்புள்ளி $f=a$ ஐத் தவிர மற்றெல்லாவிடத்து $f(f)$ ஆனது ஒழுங்கானது என்க. அப்போது $a$ஐ மையமாக வைத்து இரு ஒருமைய வட்டங்கள் $D$யினுள்ளேயே இருக்குமாறு வரையலாம். சிறிய வட்டத்தின் ஆரம் $P_2$ ஆனது நமக்கு விருப்பம்போல் மிகச் சிறியதாக வைத்துக்கொள்ளலாம்.

பெரிய வட்டத்தின் ஆரம் $P_1$ ஆனது நமது விருப்பம்போல் மிகப் பெரியதாக வைத்துக்கொள்ளலாம், ஆனால் இவ்வட்டம் $D$ல் முழுமையாக உள்ளே இருக்கவேண்டும். இவ்விருவட்டங்களின் இடையே உள்ள வளையத்துள் $f$ $(z)$க்குக் கீழ்க்கண்ட லாரென்ட் விரித்தல் உண்டு :

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}$$

வலதுபக்கத்து இரண்டாவது உறுப்புக்கு, $z=a$ இடத்து $f$ $(z)$ன் தலையாய பாகம் (principal part) என்று பெயர்.

$$b_m \neq 0, \quad b_{m+1} = b_{m+2} = \ldots = 0$$

என்றாகலாம். இவ்வகையில் தலையாயபாகமானது

$$\frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{b_m}{(z-a)^m}$$ என்ற முடிவுள்ள

தொடராகும். மடிப்புப்புள்ளி $z=a$ ஆனது $f(z)$ன்"$m$ வரிசையுள்ள கம்பம்" (pole of order $m$) எனப்படும். $z=a$ன் கெழுவானது கம்பம் $a$ இடத்து $f$ $(z)$ன் எச்சம் (residue) எனப்படும். இக் கம்பத்தின் வரிசை1 என்றால், $b_1 = \underset{z \to a}{Lt} \{(z-a) f(z)\}$ தலையாய பாக மானது முடிவில்லாத தொடரானால், மடிப்புக்கு "தனித்த முக்கிய சிறப்பு" (isolated essential singularity) என்று பெயர்.

கீழ்க்கண்டவை கவனிக்கத்தக்கவை :

1, $a$ என்பதை $f(z)$ என்ற சார்பு பலனின் பூஜ்யமாகுக. $a$ன் சுற்றுவட்டாரத்தில் $f$ $(z)$ க்கு வேறு பூஜ்யப்புள்ளிகள் இல்லையென்றால் $z=a$ என்பதின் அண்மை (சுற்று வட்டாரம்) என்று கூறலாம்.

நிறுவல் :

$|z-a| < P$ என்ற அண்மையில் $\phi(2)$ தென்க.

அப்போது $f(z)=(z-a)^m \phi(z)$ என்றெழுதலாம்.

$\phi(a) = a_m$ என்பதால் $\phi(a) \neq 0$

$\phi(a) = 2c$ என்க.

$\phi(z)$ தொடர்ச்சியுள்ள சார்பென்றால் $|\phi(z) - \phi(a)| < |c|$ என்றவாறு $|z-a| < \delta$ என்ற பகுதி இருக்கிறது.

$\therefore |z-a| < \delta$ என்றால்

$|\phi(z)| \geq |\{|\phi(a)| - |\phi(z) - \phi(a)|\}| > |c|$

$\therefore |z-a| < \delta$ல் $\phi(z) \neq 0$

(2) $z = a$ என்பது $f(z)$ன் $m$ வரிசையுள்ள கம்பம் என்க. அப்போது லாரென்ட் தேற்றம் வழி கம்பத்தின் வரை இலக்கணப்படி "கம்பங்கள் தனித்தவை" என்ற கூற்று உண்மையாகும். ஏனெனில் $z = a$ யை மையமாகக்கொண்டு, $P_2$வை ஆரமாகவுடைய சிறிய வட்டமானது $P_1$, $P_2$ ஆரங்களுடைய வட்டங்களிடையே உள்ள வளையத்தையுடைய அரங்கம் $D$ல் ஒரே ஒரு சிறப்பைக் கொண்டுள்ளது.

(3) $z = a$ என்றவிடத்து $f(z)$க்குத் துருவம் உண்டானால் எந்த வகையிலும் $\underset{z \to a}{Lt} |f(z)| = \infty$

ஏனெனில், கம்பமானது $m$ வரிசையெனில்

$$f(z) = (z-a)^{-m} \{b_m + b_{m-1}(z-a) + \ldots + b_1 (z-a)^{n-1} + \sum_0^\infty a_n (z-a)^{n+m}\};$$ $b_m \neq 0$ என்பதால் $f(z) = (z-a)^{-n} \Psi(z)$,

$\Psi(z)$ ஆனது $|z-a| < P$ல் ஒழுங்கானது

$\Psi(a) = b_m (\neq 0)$

$\therefore$ (1)ன்படி $|\Psi(z)| > \frac{1}{z} |b_m|$ என்றவாறு $|z-a| < \delta$ என்னும் கம்பத்தைச் சுற்றிய அண்மையைக்காணலாம்.

இதிலிருந்து, $|f(z)| > \frac{1}{z} |b_m| \; |z-a|^{-m}$

$\therefore \underset{z \to a}{Lt} |f(z)| = \infty$, எந்த வழியிலாவது.

## 4·9. பூச்சியங்கள், துருவங்களின் எல்லைப்புள்ளிகள் (Limiting points of zeros and poles)

$D$ அரங்கில் ஒழுங்கான சார்பு $f(z)$ன் பூச்சியங்களின் ஒழுங்கு வரிசை $a_1, a_2 \ldots a_n, \ldots$ என்க. $D$ன் ஒரு அகத்துப்புள்ளி $z = \alpha$ ஆனது இவ்வொழுங்குவரிசையின் எல்லைப்புள்ளி என்க. $z = \alpha$ன் அண்மையில் பூச்சியங்களைக்கொண்ட சார்பு $f(z)$ ஆனது தொடர்ச்சியா

யுள்ளதால், $f(\alpha)=0$. ஆனுல் $z=\alpha$ ஆனது $f(z)$ க்குப் பூச்சிய மாகாது. ஏனெனில் (1)ல் பூச்சியங்கள் தனித்தவையென நிறுவி னேம். $\therefore f(z)=0$

**குறிப்பு:** (1) $\alpha$ என்பது $f(z)$ ன் ஒழுங்கானபுள்ளி யெனின் $z$ன் அண்மையிலுள்ள புள்ளிகளில் $f(z)=0$ ஆகும்.

(2) $f(z)$க்கு $\alpha$ என்பது ஒழுங்கானபுள்ளி இல்லையென்ருல் அந்தப்புள்ளி $f(z)$ என்ற சார்பலனுக்கு தனித்த முக்கிய சிறப்புப் புள்ளி (isolated essential singular point) யாகும்.

$D$ல் $f(z)\neq 0$ என்ருல் $z=\alpha$ ஆனது சிறப்பு ஆகவேண்டும். இந்த சிறப்பு தனித்தது ஆகவேண்டும். ஆனுல் இது கம்பம் அல்ல; ஏனெனில் எந்த வழியிலும் $z$ ஆனது $\alpha$வை அணுக $|f(z)|$ ஆனது $\infty$ ஐ அணுகாது. ஆகையால் பூச்சியங்களின் எல்லைப்புள்ளியானது $(z)$ன் தனித்த முக்கிய சிறப்பு ஆகவேண்டும்.

$D$ல் $\gamma$ஐ எல்லைப்புள்ளியாகக்கொண்ட முடிவில்லாத எண்ணிக் கையுள்ள சிறப்புகள் $c_1, c_2 \ldots c_n$ என்ற புள்ளிகளைத் தவிர்த்த மற்ற புள்ளிகளிடத்து $f(z)$ ஆனது ஒழுங்கானது என்ருல் $\gamma$ ஆனது $f(z)$ன் சிறப்பு ஆகும். ஏனெனில் $\gamma$ன் அண்மையில் $f(z)$ ஆனது வரம்பற்றது. $\gamma$ ஆனது தனித்தது அல்ல என்பதால் அப்புள்ளி கம்பமாகது. இத்தகைய சிறப்பை "தனித்தது அற்ற முக்கிய சிறப்பு" (non isolated essential singularity) என்போம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$z=0$ என்பது $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ன் தனித்த "முக்கிய சிறப்புப்"புள்ளி ஆகும். இஃது $z=\frac{1}{n\pi}$ $(n=\pm 1, \pm 2\ldots)$ என்ற பூச்சியங்களின் எல்லைப்புள்ளி ஆகும். $z=\frac{2}{n\pi}$ $(n=\pm 1, \pm 3\ldots)$ என்ற புள்ளி களிடத்து $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$ க்குக் கம்பங்கள் உள்ளன. ஆதலால் கம்பங் களின் எல்லைப்புள்ளி $z=0$ ஆனது "தனித்தது அற்ற முக்கிய சிறப்புப்புள்ளி" ஆகும்.

**மீரோ சார்புகளின் துருவங்களும், பூச்சியங்களும்**
**(Poles and zeros of meromorphic fns)**
**வரை இலக்கணம் :**

தளத்தின் முடிவுள்ள பகுதியில் உள்ள கம்பங்கள் மட்டுமே சிறப்புப்புள்ளிகளாகக் கொண்டுள்ள சார்பு $f(z)$க்கு மீரோ சார்பு (meromorphic fns) என்று பெயர்.

**தேற்றம் :**

மூடிய உருவரை $C$ன் உள்ளே $f(z)$ ஆனது மீரோ சார்பு என்றும், அவ்வுருவரையின் மீது எந்தப் புள்ளியிடத்தும் $f(z) \neq 0$ என்றும் கொண்டால்

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)\, df}{f(z)} = N - P \quad (1)$$

இங்கே $N$ என்பது $C$ன் உள்ளே பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையும், $P$ என்பது $C$ன் உள்ளே கம்பங்களின் எண்ணிக்கையையும் குறிப்பான "$m$" வரிசை உள்ள கம்பம் அல்லது பூச்சியமானது "$m$" தடவைகள் எண்ணப்படவேண்டும்.

**நிறுவல் :**

$z=a$ என்பது "$m$" வரிசையுள்ள பூச்சியம் என்க. அப்போது $z=a$ன் அண்மையில் $f(z)=(z-a)^n \phi(z)$.

$\phi(z) \neq 0$, $\phi(z)$ ஆனது ஒழுங்கானசார்பு.

$$\therefore \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$$

$\dfrac{\phi'(z)}{\phi(z)}$ என்பது $z=a$ இடத்து ஒழுங்கானது என்பதால் $\dfrac{\alpha'(z)}{f(z)}$க்கு $z=a$ இடத்து "$m$" எச்சம் உடைய ஒரு வரிசை உடைய கம்பம் உள்ளது. இதுபோல் $z=b$ என்பது $k$ வரிசையுடைய துருவம் என்றால், $z=b$ இடத்து $-k$ எச்சமுடைய ஒரு வரிசை உடைய கம்பம் உள்ளது. $\therefore$ தேற்றம் IIIன்படி $\Sigma m - \Sigma k = N - P$

$C$ல் $f(z)$ ஆனது ஒழுங்கானது என்றால் $P=0$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N$$

$$\frac{d}{dz} \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \text{ என்பதால்}$$

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \triangle_c \log f(z)$$

இங்கே, உருவரை $C$ ஐச் சுற்றி $\log f(z)$ன் மாற்றத்தை $\triangle_c$ குறிக்கிறது. ஆரம்பத்தில் எடுத்துக்கொண்ட மடக்கையின் மதிப்பைப் பற்றி கவலை இல்லை.

$\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$ என்பதாலும்

$\log |f(z)|$ ஆனது ஒரு மதிப்புச் சார்பு என்பதாலும்

$$N = \frac{1}{2\pi} \triangle_c \arg f(z)$$

இந்த வாய்ப்பாட்டுக்குச் சார்பின் **மாறித்தத்துவம்** (principle of argument) என்று பெயர்.

## 4·10. ரூஷெஸ் தேற்றம் (Rouche's Theorem):

மூடிய உருவரை $C$ன் மீதும் உள்ளும் $f(z)$, $g(z)$ என்ற சார்புகள் ஒழுங்கானவையென்றும் $C$ன் மீது $|g(z)| < |f(z)|$ என்றும் கொண்டால், $C$ன் உள்ளே $f(z)$ம்; $f(z) + g(z)$ம் ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள பூச்சியங்களையுடையன.

**நிறுவல் :**

$f(z)$க்கும், $f(z) + g(z)$க்கும் $C$ன் மீது பூச்சியம் இல்லை. $f(z)$ன் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை $N$ என்றும், $f(z)+g(z)$ன், பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை $N'$ என்றும் கொண்டால்,

$$2\pi N = \triangle_c \arg f$$
$$2\pi N' = \triangle_c \arg (f + g)$$
$$= \triangle_c \arg f + \triangle_c \arg (1 + g/f)$$

$|g| < |f|$ என்பதால், $w = 1 + g/f$ என்ற புள்ளியானது $w = 1$ ஐ மையமாகக் கொண்டும், 1 ஐ ஆரமாகக் கொண்டும் வரையப்பட்ட வட்டத்தின் உள்ளே இருக்கிறது.

$w = pe^{i\theta}$ என்றால் $\phi$ ஆனது $-\pi/2$க்கும், $+\pi/2$க்கும் இடையே தான் எப்போதும் இருக்கிறது. $\therefore f$ ஆனது $C$ஐ வரையும் போது $\arg (1+g/f) = \phi$ என்பது தன்னுடைய ஆரம்ப மதிப்புக்கே திரும்புகிறது. $2\pi$ன் மடங்காக $\phi$ ஆனது ஏறுது அல்லது இறங்காது என்பதால் $\triangle_c \arg (1 + g/f) = 0$

$$\therefore 2\pi N' = \triangle_c \arg f = 2\pi N$$
$$\therefore N' = N$$

## 4·11. உச்ச குணக தத்துவம் (The Maximum Modules Principle)

**தேற்றம் :**

மூடிய உருவரை $C$ன் மீதும் உள்ளும் $f(z)$ ஆனது ஒழுங்கானது என்றால், $C$ன் அகத்துப் புள்ளி ஒன்றிலேயும் இல்லாமல் $C$ன் எல்லை மீது உச்ச மதிப்பை அடைகின்றது.

**துணைத்தேற்றம் :**

$\phi(x)$ தொடர்ச்சியான தென்றும், $\phi(x) \leq K$ என்றும் $\frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(x)\,dx \geq K$ என்றும் கொண்டால் $\phi(x) = k$ என்றாகும்.

**நிறுவல் :**

$\phi(x_1) < K$ என்க.

$\phi(x) \leq K - \epsilon$ என்றவாறு $(x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ என்றவாறு இடைவெளி இருக்கின்றது.

$$\therefore \int_a^b \phi(x)\, dx \leq 2\delta(K-\epsilon) + (b-a-2\delta) K$$

அதாவது $\leq (b-a) K - 2\delta\epsilon$

இது $\int_a^b \phi(x)\, dx \geq K$ க்கு எதிர் மறுப்பு. ஆகையால் $\phi(x) = K$.

**தேற்றம் :**

$f(z)$ மாறிலி இல்லை என்க. $C$ன் மீது $|f(z)| \leq M$ என்ருல், $C$ன் உள்ளே இருக்கும் அரங்கம் $D$ன் எல்லா அகத்துப் புள்ளிகளிடத்து $|f(z)| < M$. $f(z)$ மாறிலி என்ருல் எல்லாப் புள்ளிகளிடத்தும் $|f(z)| = M$.

**நிறுவல் :**

அரங்கம் $D$ல் $f_0$ என்ற ஒரு அகத்துப்புள்ளியிடத்து $|f(z)|$ ன் மதிப்பானது குறைந்தபட்சம் வேறெந்தப்புள்ளியிடத்து $|f(z)|$ ன் மதிப்புக்குச் சமம் என்க. $D$ன் உள்ளே முழுமையாக இருக்குமாறு $z_0$ ஐ மையமாக கொண்ட வட்டம் $\Gamma$ என்க. தேற்றம் IIIன் படி

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)\, dz}{z - z_0} \qquad \rightarrow (2)$$

$$z - z_0 = re^{i\theta}, \quad \frac{f(z)}{f(z_0)} = pe^{i\phi} \quad \text{என்ருல்}$$

$P$ம் $\phi$ம் $\theta$ சார்புகள்

$$\therefore (2) \text{ ஐ } 1 = \frac{1}{2\pi} \int_O^{2\pi} pe^{i\theta}\, d\theta \qquad \rightarrow (3)$$

என்றவாறு எழுதலாம்.

$$\therefore 1 \leq \frac{1}{2\pi} \int_O^{2\pi} p\, d\theta$$

ஆனுல் தேற்றப்படி $p \leq 1$
துணைத் தேற்றப்படி $p = 1$

(3)ன் மெய்யான பகுதி (real part) ஐ எடுத்துக்கொண்டால்

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \cos\theta \, d\theta$$

$\therefore$ துணைத்தேற்றப்படி $\cos\theta = 1$

$\therefore$ Γன் மீது $f(z) = f(z_0)$

Γன் மீது எந்தப் புள்ளி "$a$" இடத்தும் $f(z)$ ஆனது மாறிலி யாதலால், டேலர் தேற்றப்படி $f(z)$ ஆனது $a$ ன் ஒரு அண்மையில் மாறிலி ஆகும்· $\therefore$ **பகுதிச் சார்புத் தொடர்ச்சியின்படி (analytical continuation)** $C$ன் மீதும், உள்ளும் $f(z)$ ஆனது எல்லாப் புள்ளி களிடத்தும் மாறிலி ஆகும்.

**இசைச்சார்புகளுக்கு ஒத்த தேற்றம் :**

$D_1$ , $D_2$ என்ற அரங்கங்களில் $f_1(z), f_2(z)$ என்ற சார்பலன்கள் ஒழுங்கானவை என்க. $D_1$ , $D_2$ அரங்கங்களின் பொதுப் பகுதியில் $f_1(z) = f_2(z)$ என்ருல், $f_2(z)$ என்ற சார்பலன், $D_2$ அரங்கில், $f_1(z)$ என்ற சார்பலனின் பகுதிச்சார்புத் தொடர்ச்சி (analytic continuation) என்போம்.

ஒரு பகுதியில் இசையாக இருக்கும் ஒரு சார்புக்கு (harmonic-function) அப்பகுதியின் அகத்துப்புள்ளியிடத்து மீப்பெருமம் இருக்காது.

**மாதிரிக் கணக்குகள் :**

$|z-a| < R$ல் $f(f)$ ஆனது ஒழுங்காக இருக்கிறது. $O<r<R$ என்ருல், $p(\theta)$ ஆனது $f(a+\pi e^{1\theta})$ன் மெய்ப்பகுதி என்ருல்

$$f'(a) = \frac{1}{\Pi\pi} \int_{0}^{2\pi} P(\theta) e^{-i\theta} \, d\theta$$ என்று நிறுவுக.

**நிறுவல் :**

$|z-a| < R$ல் $f(z)$ ஆனது ஒழுங்கானது என்பதால், $|z-a| = r$ $(r<R)$லும் ஒழுங்கானது $|z-a| = r$ என்ற வட்டத்தில் $f(z)$ ஆனது டேலர் தொடராக விரிக்கலாம்.

அதாவது $f(z) = \sum_{0}^{\infty} am(z-a)^m$

$$= \sum_{0}^{\infty} am\, r^{m} \, (e^{i\theta})^{m}$$

$$\therefore f - a = re^{i\theta}$$

$$\therefore \overline{f(z)} = \sum_{0}^{\infty} \bar{a}_m \, r^{m} \, (e^{-i\theta})^{m}$$

இப்போது
$$\int_{C} \overline{f(z)} \frac{dz}{(z-a)^{n+1}} = \int_{0}^{2\pi} \sum_{0}^{\infty} \frac{\bar{a}_m\, r^m e^{-im\theta} \, re^{i\theta}\, id\theta}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}}$$

$$n = \sum_{0}^{\infty} \bar{a}m\, r^{m-i} \int_{0}^{2\pi} e^{-i(m+n)\theta} \, d\theta = 0$$

மேலும்
$$\int_{C} \overline{f(z)} \frac{dz}{(z-a)^2} = 0$$

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{(f(z)\, dz}{(z-a)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{(z-a)^2} dz \; (\because \int_{C} \frac{\overline{f(z)}\, dz}{(z-a)^2} = 0$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta}) + \overline{f(a+re^{i\theta})}}{r^2 e^{2i\theta}} \, re^{i\theta}\, i\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{2 \text{ Real} f(a+re^{i\theta})}{r^2 e^{2i\theta}} \cdot re^{i\theta} d\theta$$

$$\because z + \bar{z} = 2 Re(z)$$

$$= \frac{1}{\pi r} \int_{0}^{2\pi} p(\theta)\, e^{-i\theta} \, d\theta$$

$$\therefore p(\theta) = Re f(a + re^{i\theta})$$

2. $f(z)$ ஆனது $|z| < R'$க்கு ஒழுங்கானது. $|a| < R < R'$ என்றால்

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{R^2 - a\bar{a}}{(z-a)(R^2 - z\bar{a})} f(z)\, dz$$

என நிறுவுக. இங்கே $C$ என்பது $|z| = R$ என்ற வட்டம். $0 < r < R$ என்றால்

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2 f(Re^{i\theta})}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}\, d\phi$$

என்ற பாய்ஸான் (Poission) வாய்ப்பாட்டையும் இதிலிருந்து நிறுவுக.
கோஷியின் தொகைவாய்ப்பாட்டின்படி.

$$(1) \quad f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z-a)}$$

$|z| = R$ என்ற வட்டத்தைப் பொறுத்து $a$ன் தன் மாற்றுப் புள்ளி ஆன $\frac{R^2}{\bar{a}}$, வட்டத்தின் வெளியே இருக்கிறது.

$$(2) \quad \therefore 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{z - (R^2/\bar{a})}$$

(1) – (2) தருவது

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{R^2 - z\bar{a} + \bar{a}(z-a)}{(z-a)(R^2 - z\bar{a})} f(z)\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{R^2 - a\bar{a}\, f(z)\, dz}{(z-a)(R^2 - z\bar{a})}$$

இங்கே $a = re^{i\theta}$ ; $z = Re^{i\theta}$ என்றால்

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - re^{i\theta}\ re^{-i\theta})\ f(Re^{i\theta})\ iRe^{i\theta}\ d\theta}{(Re^{i\theta} - re^{i\theta})(R^2 - Re^{i\theta}\ re^{-i\theta})}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{O}^{2\pi} \frac{R^2 - r^2 \ f \ (Re^{i\phi}) \ d\phi}{(R - re^{i(\theta - \phi)}) \ (R - re^{-i(\theta - \phi)})}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{O}^{2\pi} \frac{R^2 - r^2 f (Re^{i\theta}) \ d\phi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2}$$

3. $| z - a | = R$ என்ற வட்டம் $C$ன் உள்ளே $f(z)$ ஆனது ஒழுங்கானதென்றும், $C$ன் மீது $| f(z) | \leq M$ என்றும் கொண்டால்

$$| f^n(a) | \leq \frac{M \ \underline{|n}}{R^n}$$

$$f^n(a) = \frac{\underline{|n}}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) \ dz}{(z-a)^{n+1}}$$

$$\therefore | f^n(a) | = \left| \frac{\underline{|n}}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) \ dz}{(z-a)^{n+1}} \right|$$

$$\leq \frac{\underline{|n}}{| 2\pi i |} \int_C \frac{| f(z) | \ | dz |}{| z - a |^{n+1}}$$

$$\leq \frac{\underline{|n}}{2\pi} \ \frac{M}{R^{n+1}} \int_C | dz |$$

$$\leq \frac{\underline{|n}}{2\pi} \ \frac{M}{R^{n+1}} \int_O^{2\pi} R \ d\theta \qquad \because z = R e^{i\theta} \quad | dz | = | i R e^{i\theta} | = R \ d\theta$$

$$\leq \frac{\underline{|n}}{2\pi} \ \frac{M}{R^{n+1}} \ 2\pi R$$

$$\leq \frac{M \ \underline{|n}}{R^n}$$

4. கந்தழியைத் தவிர மற்றெல்லாவிடத்தும் $f(z)$ ஆனது ஒழுங்கானதென்றும், கந்தழியிடத்து $f(z)$ன் துருவம் $n$ வரிசை என்றும், கொண்டால் $f(z)$ ஆனது $n$ அடுக்குள்ள பல்லுறுப்பு எனக் காண்பிக்க,

**நிறுவல் :**

முடிவுள்ள தளத்தில் $f(z)$ ஆனது ஒழுங்கானது என்க. டேலர் தேற்றப்படி

(i) $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots\ldots + a_nz^n + \ldots$ இங்கே $z$க்குப் பதில் $\frac{1}{\xi}$ ஐப் பிரதியிட்டால்

$$(ii)\quad \phi(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right) = a_0 + \frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\xi_2} + \ldots + \frac{a_n}{\xi^n} + \ldots.$$

$f(z)$ ஆனது ஒழுங்கானது. ஆதலால் $\phi(\xi)$ம் ஒழுங்கானது. $z=\infty$ இடத்து $f(z)$க்கு $n$ வரிசையுள்ள துருவம் உள்ளதால் $\phi(\xi)$க்கு $\xi = 0$ இடத்து $n$ வரிசையுள்ள துருவம் உள்ளது.

∴ (11)ல் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளே உள்ளன. ∴ $n$, முடிவுள்ளது.

$$\therefore \phi(\xi) = a_0 + \frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\xi^2} + \frac{a_3}{\xi^3} + \ldots + \frac{an}{\xi^n}$$

$$\therefore f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n.$$

∴ $f(z)$ ஆனது $n$ அடுக்குள்ள பல்லுறுப்பு.

## பயிற்சி

(1) ஒரு விகித முறு சார்புக்குத் துருவங்களைத் தவிர வேறெந்த மடிப்புகளும் இல்லையென நிறுவுக.

(2) $f$ன் முடிவுள்ள மதிப்புகளுக்கு $f(z)$ ஆனது ஒழுங்கானது என்றும், $\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = A(|z|^k)$ என்றும் கொண்டால் $f(z)$ ஆனது $k$ அல்லது $k$க்குக் குறைவான அடுக்குள்ள பல்லுறுப்பு என நிறுவுக.

(3) $|z| < 1$க்கு $\frac{(z-2)(z+2)}{(z+1)(z+4)}$ ஐ விரிக்க.

(4) $z=i$ ன் அண்மையில் செல்லுபடியாகும் $f(z) = \frac{2z^3+1}{z^2+z}$ன் டேலர் விரிதலைக் காண்க.

(5) $|z| < 1$க்கு $\frac{1}{(1+z^2)(z+2)}$ன் டேலர் அல்லது லாரென்ட் விரிதலைக் காண்க.

(6) $z=\infty$ இடத்து $e^z$க்கு தனித்த முக்கிய மடிப்பு இருக்கிறது என நிறுவுக.

(7) $e^{-1/z^2}$ க்கு மடிப்புகளே இல்லையென நிறுவுக.

(8) $a > e$ என்றால் ரூஷெஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $|z| = 1$ என்ற வட்டத்துள் $e^z = az^n$க் $n$ மூலங்கள் உண்டென நிறுவுக.

நிறுவல் :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $az^n - e^z = 0$, $f(z) = a\,z^n$ என்னும், $g(z) = -e^z$ என்றும் கொள்க.

$|z| = 1$ என்பது $c$ என்றால், $c$ன் உள்ளும் மேலும் $f(z)$ம் $g(z)$ம் ஒழுங்கானவை.

மேலும் $\dfrac{|g(z)|}{|f(z)|} = \dfrac{|-e^z|}{|a\,z^n|}$, $c$ன் மீது.

$$= \frac{|-1|\,|e^z|}{|a|\,|z|^n} = \frac{|e^z|}{a\,|z|^n}$$

$$= \frac{\left|1 + z + \frac{1}{\lfloor 2} z^2 + \frac{z^3}{\lfloor 3} + \dots\right|}{a\,|z|^n}$$

$$< \frac{|1 + |z| + \frac{1}{\lfloor 2} |z|^2 + \dots|}{a\,|z|^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \dots (\because |z| = 1 \; c\text{ன் மீது})$$

$$= \frac{e}{a} < 1 \because a > e$$

$$\therefore \frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$$

$\therefore$ ரூஷெஸ் தேற்றத்தின் நிபந்தனைகள் உறுதிப்பட்டன.

$\therefore$ ரூஷெஸ் தேற்றப்படி $g(z) + f(z) = a\,z^n - e^z$ன் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையும் $f(z) = a\,z^n$ன் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையும் சமமானவை. ஆனால் $|z| = 1$னுள் $a\,z^n$ன் $n$ பூச்சியங்களும் உள்ளன. $\therefore |z| = 1$ல் $a\,z^n - e^z$க்கு $n$ பூச்சியங்கள் உள்ளன.

# 5. எச்சங்களின் நுண்கணிதம்
## (The Calculus of Residues)

### 5·1. எச்சங்களின் நுண்கணிதம் (The Calculus of Residues)

$z=a$ என்பது $f(z)$ன் கம்பம் என்றால் $f(z)$ன் லாரென்ட் விரித்தலில் $\frac{1}{z-a}$ன் கெழு ஆனது கம்பம் $z=a$ இடத்து $f(z)$ன் எச்சம் என்று வரையறுத்தோம்.

$z=a$ என்பது $m$ வரிசையுள்ள கம்பம் எனின் $f(z)$ ஆனது

$\sum_{0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{1}^{m} b_n (z-a)^{-n}$ என்றும் கண்டோம் $z=a$ என்பது ஒரு வரிசையுள்ள கம்பமெனின் எச்சம் $b_1$ ஆனது $\lim_{z \to a} \{(z-a) \; f(z)\}$ என்றவாறு கணிக்கப்பட வேண்டும் என்றும் கண்டோம்.

"மூடிய உருவரை $C$ன் உள்ளே $z=a$ ஒன்றுதான் $f(z)$ன் மடிப்பு என்றும், $\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz$ க்கு மதிப்பு உண்டென்றும் கொண்டால், இம்மதிப்புக்கு $z=a$ இடத்து "$f(z)$ **ன் எச்சம்**" என்றும் எச்சத்தை வரையறுக்கலாம்.

### 5·2. தேற்றம் 1. கோசியின் எச்சத் தேற்றம் (Cauchy's Residue Theorem)

$C$ ன் உள்ளே முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள கம்பங்களை மட்டும் தவிர்த்து, $C$ன் மீதும் உள்ளேயும் $f(z)$ ஆனது ஒழுங்

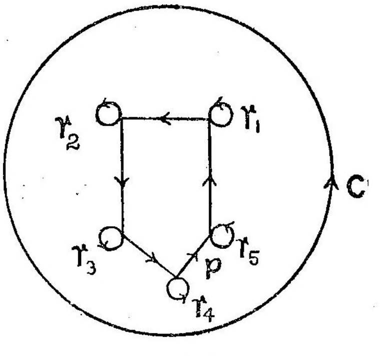
கானது என்க. $C$ன் உள்ளே $f(z)$ன் கம்பங்களிடத்து எச்சங்களின் கூட்டுத்தொகையை $\Sigma R$ என்று குறியிட்டால்

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i\, \Sigma R$$

**நிறுவல் :**

$C$ன் உள்ளே $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ என்பவை எண்ணிக்கை $n$ உள்ள கம்பங்கள் என்க.

$C$ன் உள்ளே அமைந்தவாறும், ஒன்றுக்கொன்று வெட்டிக் கொள்ளாதனவாயும், "$\alpha_r$" ஐ மையமாகவும் "$\delta$" நீளம் ஆரமுடையதாகவும் வட்டங்கள் வரைக. $C$ க்கும், சிறு வட்டங்கள் $\gamma_r$க்கும் இடையே உள்ள பகுதியில் $f(z)$ ஆனது நிச்சியமாய் ஒழுங்கானவையாய் உள்ளது. சிறுவட்டங்கள் $\gamma_r$ம், இவற்றைச் சேர்க்கும் பல்கோணம் $P$ம் உடைய உருவமாக $C$ ஐ உருக்குலைக்கலாம் (deform). இதை விளக்கும் படம் கீழே இருக்குமாறு




படம் 10

$$\int_C f(z)\, dz = \int_P f(z)\, dz + \sum_{\Pi=1}^{n} \int_{r_1} f(z)\, dz + \ldots\ldots$$

$$+ \sum_{\Pi=1}^{n} \int_{\gamma_n} f(z)\, dz$$

ஏனெனில் $P$ன் உள்ளும் மேலும், $f(z)$ ஆனது ஒழுங்கானதாய் உள்ளதால் பல்கோணம் $P$ ஐச் சுற்றிய தொகையானது பூச்சியமாகிறது.

$\alpha_r$ ஆனது $m$ வரிசையுள்ள கம்பமாதலால்,

$$f(z)=\phi(z)+\sum_{S=1}^{m}\frac{b_s}{(z-\alpha_r)^s}$$

என்பதில் $\phi(z)$ ஆனது $\gamma\pi$ மேலும் உள்ளும் ஒழுங்கானது ஆதலால்

$$\int_{\gamma\pi} f(z)\,dz=\sum_{S=1}^{m}\int_{\gamma\pi}\frac{b_s}{(z-\alpha\pi)}\,dz$$

$f=\alpha\pi+\delta e^{i\theta}$ என்றால், $\theta$ ஆனது 0 லிருந்து $2\pi$ வரை மாறுகிறது, ஏனெனில் புள்ளி $f$ ஆனது வட்டம். $\gamma\Pi$ ஐ ஒரு முறை முழுமையாகச் சுற்றுகிறது.

$$\therefore \int_{\gamma_r} f(z)\,dz=\sum_{s=1}^{m} b_s\,\delta^{1-s}\int_{O}^{2\pi} e^{(1-s)i\theta}\,i\,d\theta=2\pi i\,b_1$$

$$\therefore \int_{C} f(z)\,dz=\sum_{\Pi=1}^{m}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz=2\pi i\,\Sigma R$$

## 5·3. தேற்றம்

$\lim\limits_{z\to a}\left\{(z-a)\,f(z)\right\}=b$ என்றும், $|z-a|=\Pi$ என்ற வட்டத்தின் ஒரு வில் $C$ ஆனது $\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$ என்றும் கொண்டால்

$$\lim_{\Pi\to 0}\int_{C} f(z)\,dz=i\,b\,(\theta_2-\theta_1)$$

**நிறுவல் :**

$(z-a)\,f(z)=b+\delta$ என்க.

கொடுக்கப்பட்ட $\epsilon$ க்கு, $|z-a|<\eta$ என்றால் $|\delta|<\epsilon$ என்றவாறு ஒரு $\eta(\epsilon)$ ஐக் கண்டுபிடிக்கலாம்

$$\int_{C} f(z)\,dz=\int_{C}\frac{b+\delta}{z-a}\,dz=i\int_{\theta_1}^{\theta_2}(b+\delta)\,\delta\theta$$

$$\therefore\left|\int_{C} f(z)\,dz-i\,b\,(\theta_2-\theta_1)\right|<\epsilon(\theta_2-\theta_1)$$

∴ எல்லையின் வரை இலக்கணப்படி

$$\lim_{\pi \to 0} \int_C f(z)\, dz = i\, b\, (\theta_2 - \theta_1)$$

**கிளைத்தேற்றம் :**

$z = a$ என்பது $f(z)$ன் ஒரு வரிசையுள்ள (simple pole) கம்பமெனில் $z = a$ இடத்து $b$ ஆனது $f(z)$ன் எச்சமாகும். உருவரையானது கம்பத்தைச் சுற்றியுள்ள சிறிய வட்டமென்றால், $\theta_2 - \theta_1 = 2\pi$

$$\therefore \quad \int_C f(z)\, dz = 2\pi\, i\, b$$

## 5·4. ஒரு நீள ஆரம் உடைய வட்டத்தைச் சுற்றி தொகையிடல் (Integration Round the Unit Circle)

$\phi\ (\cos\theta,\ \sin\theta)$ என்பது $\sin\theta$, $\cos\theta$ ஐப் பொறுத்த விகிதமுறு சார்பென்றால்

$$\int_0^{2\pi} \phi\ (\cos\theta,\ \sin\theta)\ d\theta$$ என்ற உருவரைத் தொகையிடலைக்

காண்போம்.

$z = e^{i\theta}$ என்றால், $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\, z\left(-\frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{dz}{iz} = d\theta$$

$$\therefore \quad \int_0^{2\pi} \phi\ (\cos\theta, \sin\theta)\ d\theta = \int_C \Psi\ (z)\ dz$$

என்பதில் $\Psi(z)$ ஆனது $z$ ஐப் பொறுத்த விகிதமுறு சார்பு. $C$ என்பது $|z| = 1$ என்ற ஒரு நீள ஆரமுடைய வட்டம்.

$$\therefore \int_C \Psi\ (z)\ dz = 2\pi i\, \Sigma R_e$$

என்பதில் $\Sigma R_e$ என்பதில் $C$ன் உள்ளே இருக்கும் கம்பங்களிடத்து $\Psi(z)$ன் எச்சங்களின் கூட்டுத் தொகை.

**மாதிரிக் கணக்குகள் :**

$$(1) \int_{O}^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos\ (\sin\theta - n\theta) d\theta = \frac{2\pi}{\lfloor n} \text{ (}n\text{ நேர் முழுவெண்)}$$

என நிறுவுக.

**நிறுவல் :**

$$I = \int_{O}^{2\pi} e^{\cos\theta} [\cos(\sin\theta - n\theta) + i \sin(\sin\theta - n\theta)\ d\theta]$$

ஐக் கருதுக.

$$= \int_{O}^{2\pi} e^{\cos\theta} e^{i(\sin\theta - n\theta)} d\theta$$

$$= \int_{O}^{2\pi} e^{(\cos\theta + i\sin\theta)} e^{-in\theta} d\theta$$

$e^{i\theta} = z$ என்றால் $d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\therefore I = \int_{C} e^{z} \frac{1}{z^{n}} \frac{dz}{iz} = i \int_{C} \frac{e^{z}}{z^{n+1}} dz$$

என்பதில் $C$ என்பது $|z| = 1$ என்ற வட்டம் $C$ ன் உள்ளே இருக்கும் ஒரே கம்பமானது $(n+1)$ வரிசையுள்ள $z=0$ என்ற புள்ளி ஆகும்.

$$z=0 \text{ இடத்து எச்சம்} = \frac{1}{\lfloor n} \left\{ \frac{d^{n}}{dz^{n}} (-i e^{z}) \right\}_{z=0}$$

$$= -\frac{i}{\lfloor n}$$

$\therefore$ கோசியின் எச்சத்தேற்றப்படி

$$I = 2\pi i \times \frac{-i}{\lfloor n} = \frac{2\pi}{\lfloor n}$$

$$\therefore \int_{O}^{2\pi} e^{\cos\theta}\,[\cos(\sin\theta - n\,\theta) + i\sin(\sin\theta - n\,\theta)]\,d\theta$$

$$= \frac{2\,\pi}{\underline{|n}}$$

$$\therefore \int_{O}^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta - n\theta)\,d\theta = \frac{2\,\pi}{\underline{|n}}$$

2. $\int_{O}^{2\pi} \frac{d\,\theta}{2+\cos\theta} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{3}}$ எனக் காண்பிக்க.

$|\,z\,| = 1$ என்ற ஒரு நீள ஆரமுள்ள வட்டத்தை மூடிய உரு வரையாக எடுத்துக்கொள்க.

இவ்வட்டத்தின் ஒரு வில்லின் மீது $z = e^{i\theta}$ ஐ எடுத்துக்கொள்க.

$$\frac{1}{z} = e^{-i\theta} \quad i\,dz = e^{i\theta}\;;\; d\theta \;\therefore d\theta = \frac{d\,z}{i\,z}$$

$$\therefore I = \int_{O}^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

$$= \int_{O}^{2\pi} \frac{2d\theta}{4 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}} \quad \left(\because \cos\theta = \frac{z+z}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{i}\int_{C} \frac{2\,d\,z}{z\,(4+z+{}^{1}/z)} = \frac{2}{i}\int_{C} \frac{d\,z}{z^2+4\,z+1}$$

$z^2+4z+1 \to 0 \to z = -2 \pm \sqrt{3}$. வட்டத்தின் வெளியே உள்ள கம்பம் $-2+\sqrt{3}$. இவ்விடத்து எச்சம் $= \frac{2}{i}\,\frac{1}{\left[\frac{d}{dz}(z^2+4z+1)\right]}$

என்பதில் $z = -2+\sqrt{3}$

$$\therefore \text{எச்சம்} = \frac{1}{i\,\sqrt{3}}$$

$\therefore$ கோசியின் எச்சத்தேற்றப்படி,

$$I = 2\pi i \times \frac{1}{i\,\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

கீழ்க்கண்டவைகளை நிறுவுக.

(1) $$\int_{0}^{2\pi} e^{-\cos\theta} \cos(n\theta+\sin\theta)\, d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{n}}$$

(2) $$\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{b^2}\left[a-\sqrt{a^2-b^2}\right] \quad (a>b>0)$$

(3) $$\int_{0}^{\pi} \frac{a\, d\phi}{a^2+\cos^2\phi} = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}} \quad (a>0)$$

(4) $$\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+4\cos\theta}\, d\theta = \pi/6.$$

(5) $$\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}.$$

# BIBLIOGRAPHY


1. E. G. PHILLIPS, *Functions of a Complex - Variable with Applications.*

2. A. RAMANATHAN, *Mathematical Analysis : Part V, Functions of a Complex Variables.*

3. AHLFOS, *Complex Analysis.*

# கலைச்சொற்கள்

**A**

Analytic Continuation — பகுதி சார்புத் தொடர்ச்சி
Arc — வில்
Argument — கோணவீச்சம்
Associative Law — சேர்ப்பு விதி

**B**

Bilinear Transformation — இரு நேர் கோட்டு மாற்றம்
Boundary Point — எல்லைப் புள்ளி
Bounded Set — வரம்புடைய கணம்
Bounded Variation — எல்லையோடு மாற்றம்

**C**

Calculus of Residues — எச்சங்களின் நுண் கணிதம்
Cardioid — நெஞ்சுவளை
Cauchy's Theorem — கோசியின் தேற்றம்
Cauchy's Residue Theorem — கோசியின் எச்சத் தேற்றம்
Circum Centre — சுற்று மையம்
Closed Set — மூடு கணம்
Commutative Law — பரிமாற்று விதி
Concentric Circles — குத்து வட்டங்கள்
Conjugate Complex Number — இணைச் சிக்கலெண்
Conformal Representation — இணங்க சார்பை
Conformal Transformation — இணங்க சார்பை மாற்றம்
Continuity — தொடர்ச்சி
Contour — உரு வரை
C. R. Equation — கோ. இ. சமன்பாடு
Critical Points — முறிவுப் புள்ளிகள்
Cross Cut — குறுக்கு வெட்டி
Cross Ratio — குறுக்குத் தகவு
Curve — வளைகோடு

**D**

Deformation — உருக் குலைதல்
Degree of Equation — சமன்பாடுகளின் படி
Differentiability — வகையிடத்தக்கவை
Differential Coefficient — வகைக் கெழு
Differential Equation — வகைக் கெழுச் சமன்பாடு
Distributive Law — பரவு விதி
Domain — அரங்கம்

**E**

Equation — சமன்பாடு
Exponential Transformation — அடுக்குக்குறி மாற்றம்
Extended Plane — விரி சம தளம்

### F

Function — சார்பலன்

### G

Geometric Inversion — வரைகணித தன் மாற்றம்
Goursat's Lemma — கூர்ஸாவின் துணைத்தேற்றம்

### H

Harmonic Function — இசைச் சார்பலன்

### I

Imaginary Axis — மெய்யிலா அச்சு
Imaginary Number — சிக்கல் எண்
Imaginary Part — மெய்யிலாப் பகுதி
Infinity — கந்தழி யெண்
Integrate — தொகையிடல்
Interior — அகத்து, அகம், உள்ளே
Interior Point — உள் வரம்புப் புள்ளி
Invariance — மாற்ற மின்மை
Inverse Points — தன் மாற்றப் புள்ளிகள்
Isogonal Transformation — கோணம் போற்றும் மாற்றம்
Isolated Essential Singularity — தனித்த முக்கியச் சிறப்பு

### L

Laurent's Theorem — லாரண்ட் தேற்றம்
Limit — வரம்பு
Limiting Point — வரம்புப் புள்ளி
Logarithmic Transformation — மடக்கை மாற்றம்
Louiville's Theorem — லியோவி தேற்றம்

### M

Magnification — உருப் பெருக்கம்
Maximum Modulus Theorem — உச்ச குணக தத்துவம்
Mean Value Theorem — இடை மதிப்புத் தேற்றம்
Meromorphic Function — மீரோ சார்பு பலன்
Mobius Transformation — மோபீஸ் மாற்றம்
Modulus — மட்டு
Multiple Point — மடங்குப் புள்ளி

### N

Neighbourhood — சுற்று வட்டாரம்
Net Work of Meshes — வலைக் கண்களின் தேறிய வேலை
Non Isolated Essential Singularity — தனித்தது அற்ற முக்கியச் சிறப்புப் புள்ளி

### O

One to one Transformation — ஒன்றுக் கொன்றான மாற்றம்
Open Set — திறந்த கணம்

| | | |
|---|---|---|
| Origin | — | ஆதி |
| Orthocentre | — | செங்குத்து மையம் |

**P**

| | | |
|---|---|---|
| Parabola | — | பரவளைவு |
| Point at Infinity | — | கந்தழிப் புள்ளி |
| Poisson Formula | — | பாயஸான் வாய்ப்பாடு |
| Pole | — | துருவம், கம்பம் |
| Pole of order $m$ | — | '$m$' வரிசையுள்ள கம்பம் |
| Polar Coordinates | — | கோண அச்சு |
| Positive Number | — | மிகை யெண், நிறை யெண் |
| Principal Part | — | தலையாய பாகம் |
| Principle of Argument | — | மாதிரித் தத்துவம் |

**R**

| | | |
|---|---|---|
| Radius Vector | — | ஆரைத் திசை |
| Rational Function | — | விகிதமுறு சார்பு |
| Real Axis | — | மெய் அச்சு |
| Real Number | — | மெய் எண் |
| Real Part | — | மெய்ப் பகுதி |
| Rectangular Hyperbola | — | செவ்வக அதிபரவளைவு |
| Rectifiable Curve | — | நீளம் காணும் வளைகோடு |
| Reflexion | — | பிரதி பிம்பம், எதிருருவம் |
| Regular Function | — | ஒழுங்கான சார்பலன் |
| Residue | — | எச்சம் |
| Root | — | மூலம் |
| Rotation | — | சுழற்சி மாற்றம் |
| Rouche's Theorem | — | ரூஷோவின் தேற்றம் |

**S**

| | | |
|---|---|---|
| Sense of Rotation | — | திரும்பும் திசை |
| Sequence | — | ஒழுங்கு வரிசை |
| Set | — | கணம் |
| Similarity | — | வடிவொத்தம் |
| Similar and Similarly Placed | — | வடிவொத்ததும் ஒரே மாதிரி வைக்கப்பட்டதும் |
| Simple Pole | — | ஒரு வரிசையுள்ள கம்பம் |
| Singularity | — | சிறப்புப் புள்ளி |
| Singular Point | — | சிறப்புப் புள்ளிகள் |

**T**

| | | |
|---|---|---|
| Taylor's Theorem | — | டேலரின் தேற்றம் |

**U**

| | | |
|---|---|---|
| Uniform Continuity | — | சீரான தொடர்ச்சி |
| Upper Bound | — | மேல் எல்லை |

**W**

| | | |
|---|---|---|
| Whole Plane | — | முழுமைத் தளம் |